UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROMOVER AS CONEXÕES ENTRE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES: UM ESTUDO SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO NO 10.º ANO

Ana Isabel Penha Oliveira

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Didática da Matemática

Trabalho de Projeto Orientado

pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

2015

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROMOVER AS CONEXÕES ENTRE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES: UM ESTUDO SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO NO 10.º ANO

Ana Isabel Penha Oliveira

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Didática da Matemática

Trabalho de Projeto Orientado

pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

2015

Resumo

O presente estudo foi realizado no âmbito duma unidade de ensino promotora de conexões entre representações de funções, aplicada no 2.º período do ano letivo 2014/2015, numa turma de 10.º ano de matemática A. A problemática do estudo consiste na análise da compreensão do conceito de função por parte dos alunos, ao longo da unidade de ensino, identificando dificuldades de aprendizagem das funções e tentando perceber de que forma as conexões entre representações contribuem para o desenvolvimento do conceito de função. Formularam-se as seguintes questões de investigação: *Quais as dificuldades iniciais que os alunos revelam na compreensão do conceito de função?; Que compreensão revelam os alunos das propriedades de determinados tipos de funções (afim, quadrática e definida por ramos)?; Que conexões os alunos estabelecem entre as várias representações de determinados tipos de funções (afim, quadrática e definida por ramos)?; De que forma é que uma unidade de ensino que promove as conexões entre diferentes representações contribui para a compreensão do conceito de função pelos alunos?*

Foi desenvolvido um estudo exploratório de natureza qualitativa, cuja recolha de dados foi realizada através de questionários, observação participante, gravações áudio/vídeo e documentos produzidos pelos alunos (questionários, fichas de trabalho e de avaliação). As dificuldades iniciais relacionam-se com: construção/leitura/interpretação de gráficos que representam funções; determinação de objetos/imagens; estabelecimento de conexões entre representações. Durante a unidade de ensino verificou-se que a conversão de determinada representação de função na representação algébrica foi, no geral, aquela que ofereceu mais dificuldades. Concluiu-se que o tipo de função e o reconhecimento da invariância das propriedades das funções estudadas, nas suas várias representações, condicionam a compreensão do conceito de função. A promoção das conexões entre representações, o tipo de funções estudadas, o ambiente de aprendizagem de carácter exploratório e o recurso à calculadora gráfica revelaram-se facilitadores do desenvolvimento do conceito de função.

Palavras-chave: Conceito de função, conexões entre representações, função definida por ramos, funções polinomiais de 1.º e 2.º grau, ensino secundário.

Abstract

The present study was developed in the scope of a teaching unit that promotes the connections between representations of functions, during the second term of the school year of 2014/2015, in a 10th grade class. The problematic of this study consists in the analysis of the comprehension of the concept of function by the students along the teaching unit, identifying difficulties in learning the functions and trying to understand in what way the connection between representations contributes to the development of the concept of function. The following research questions were formulated: *Which are the initial difficulties that the students reveal in the comprehension of the concept of function?; What comprehension do the students reveal about the properties of specific types of functions (linear, quadratic and piecewise defined function)?; Which connections do the students establish between the several representations of specific types of functions ? (linear, quadratic and piecewise defined function). In which way does a teaching unit that promotes the connections between different representations, contributes to the comprehension of the concept of function by the students?*

An exploratory study of qualitative nature was developed, whose gathering data was realized through questionnaires, participant observation, audio and video recordings, and documents produced by the students (questionnaires, worksheet papers and evaluation worksheets). The initial difficulties are related to: construction, reading, interpretation of graphics that represent functions; determination of objects/images; linking representations. During the teaching unit it was verified that the conversion of specific representations of functions in the algebraic representation was, in general, the one that offered more difficulties. It was concluded that the type of function and the recognition of the unchanging of the functions properties, in its several representations, have an impact on the comprehension of the function concept. The promotion of the connections between representations, the type of function, the learning environment of exploratory character and the appeal to the graphic calculator were revealed as facilitators of the development of the function concept.
Key words: Function Concept; Connections between representations; Piecewise defined function; Polynomial function (1st and 2nd grade); Secondary education.

Agradecimentos

À Professora Doutora Hélia Oliveira, pela orientação para com o meu trabalho, por estar sempre presente com a sua disponibilidade, exigência e guiamento. Por me ter ensinado e ajudado tanto.

Aos meus alunos que se mostraram disponíveis e interessados em participar no estudo e que se empenharam para o melhor desenvolvimento possível das atividades.

À direção da escola em causa, a todos os colegas e a todos os encarregados de educação que se mostraram recetivos e que possibilitaram e colaboraram para a concretização do estudo.

A todos os meus professores de sempre, em especial os de matemática, por me terem conseguido conquistar, e a todos os outros que me ajudaram a ser professora e a "eterna estudante" que sempre desejei.

A todos os meus alunos de sempre por me terem dado motivação e por me ajudarem na minha realização.

A todos os que me encorajaram.

A ti mãe, pelo apoio, motivação e força incessante.

A ti Rui, pelo amparo, pela paciência e por aguentares as minhas ausências ao longo dos períodos de trabalho.

E a ti Leonor, a quem dedico este trabalho, por contigo teres trazido a inspiração e a força para a mãe realizar mais um sonho antigo.

Índice Geral

Índice de figuras

Índice de quadros

Índice de tabelas

Índice de anexos

1. Introdução

A elaboração do presente trabalho de projeto pressupôs a identificação de uma problemática num determinado contexto, aliada a uma motivação pessoal. Neste capítulo será realizada uma apresentação global e sucinta do trabalho desenvolvido, onde serão descritos os objetivos estabelecidos e indicadas as principais razões que justificaram a escolha do contexto e da problemática do estudo.

1.1. Motivação para o estudo

Como professora de Matemática do ensino básico e secundário que conta com 14 anos de experiência e que já lecionou a disciplina de Matemática em vários anos de escolaridade (do 7.º ao 12.º), refletidamente identifico o "trabalho com as funções" como um dos mais importantes ao longo do trajeto escolar dos alunos. Reconheço também tratar-se de um dos trabalhos a que associam várias dificuldades que impedem, por vezes, uma boa compreensão do conceito de função e a consequente aplicação do mesmo a diversas situações. Leciono a disciplina de Matemática desde a altura em que realizei o meu estágio pedagógico no âmbito da Licenciatura em Ensino da Matemática, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Curiosamente, iniciei o meu percurso docente a lecionar o 10.º ano de escolaridade e, desde então, tem sido um ano de escolaridade que tenho lecionado com alguma frequência. Passados estes 14 anos considero-me uma professora com alguma experiência, conhecedora dos programas do ensino básico e secundário e com interesse constante pelo desenvolvimento de métodos facilitadores do processo de ensino aprendizagem, com vista ao sucesso dos alunos.

No 10.º ano de escolaridade os alunos já têm contacto de há alguns anos com as funções, o que, por si só não garante que o conceito está efetivamente compreendido e apropriado. Assim, trata-se de um ano de escolaridade onde o trabalho a desenvolver pelo professor de Matemática é fulcral para o desenvolvimento de um conceito tão fundamental como o de função. Sendo um dos meus objetivos profissionais primordiais a promoção do sucesso escolar dos meus alunos, o projeto de construir tarefas intencionais, capazes de promover o desenvolvimento do conceito de função constituiu por si só uma motivação. Para além da análise da evolução do conceito de função nos alunos que me proponho realizar ao longo da investigação, também considero como proposta desafiante a construção de tarefas promotoras de aprendizagem. Esta questão, aliada não só ao capítulo das funções, tem-me acompanhado ao longo do meu trajeto como professora e é, naturalmente, fundamental para a promoção do sucesso académico dos alunos, constituindo-se, por si só, também uma motivação para o estudo que me proponho realizar.

Aprender sobre o tema, rever a literatura existente, desenvolver-me profissional e pessoalmente e tentar contribuir para o desenvolvimento de outros possíveis interessados são exemplos de outros focos motivacionais para o meu estudo.

1.2. Apresentação do estudo e problemática

O presente estudo desenvolve-se no âmbito da minha prática profissional, onde assumo o papel de professora, investigadora e participante. Foi dinamizado numa escola pertencente ao concelho de Oeiras, durante o segundo período do ano letivo 2014/2015, numa turma de 10.º ano do curso de ciências socioeconómicas.

A definição de uma problemática orientadora de um trabalho de projeto é de extrema importância uma vez que é, em si, o fio condutor de toda a investigação. Analisar a compreensão, por parte dos alunos, do conceito de função ao longo da unidade didática “Funções I”, no 10.º ano (Matemática A), constitui a minha problemática de estudo. Dadas as limitações temporais, os subtemas escolhidos do referido capítulo são os seguintes: função afim, função definida por ramos e função quadrática. Na análise da evolução do desenvolvimento do conceito de função serão estudadas com algum destaque as dificuldades de compreensão aliadas à aprendizagem do conceito e as conexões entre diferentes representações que os alunos realizam no trabalho com funções.

Tendo em conta a problemática apresentada, formulei sobre as seguintes questões de investigação:

1. Quais as dificuldades iniciais que os alunos revelam na compreensão do conceito de função?
2. Que compreensão revelam os alunos das propriedades de determinados tipos de funções (afim, quadrática e definida por ramos)?
3. Que conexões os alunos estabelecem entre as várias representações de determinados tipos de funções (afim, quadrática e definida por ramos)?
4. De que forma é que uma unidade de ensino que promove as conexões entre diferentes representações contribui para a compreensão do conceito de função pelos alunos?

Uma proposta pedagógica que promove as conexões entre diferentes representações foi criada com o intuito contribuir para o desenvolvimento do conceito de função, tendo como base as orientações curriculares nacionais do ensino secundário em vigor (ME, 2001) e do ensino básico correspondentes àquelas aplicadas aos alunos participantes (ME, 2007). Para além dessas, a minha própria experiência profissional, investigações e estudos realizados no âmbito da temática também contribuíram para a elaboração da unidade de ensino.

1.3. Estrutura do trabalho de projeto

O trabalho de projeto surge em resposta a uma questão ou problema identificado num contexto elegido para intervenção. Envolve o estabelecimento de um programa de intervenção contemplando a sua planificação, implementação e avaliação sustentada por métodos investigativos. O estudo apresentado é um estudo exploratório de natureza qualitativa, onde os métodos de recolha de dados se assentam na observação participante e na análise documental (trabalhos produzidos em sala de aula pelos alunos; questionários e registos áudio e/ou vídeo das aulas).

No segundo capítulo, é possível começar por analisar o enquadramento teórico no que diz respeito a aspetos relacionados com a didática da Matemática, nomeadamente com a aprendizagem das funções. Irei também apresentar as orientações curriculares e didáticas para o ensino da Matemática no secundário, particularmente no 10.º ano de escolaridade. Procurarei assim dar a conhecer as principais opções teóricas no âmbito curricular e didático em que se apoia a proposta pedagógica. É seguidamente apresentada a unidade de ensino no terceiro capítulo, onde serão dadas a conhecer em pormenor as orientações curriculares em que se baseou, o seu planeamento, as estratégias e tarefas que nela foram implementadas. Ainda nesse capítulo irei apresentar o contexto escolar onde foi aplicada a unidade de ensino, bem como uma pequena descrição das aulas de implementação do projeto.

No quarto capítulo explicitarei as principais opções metodológicas que regem a investigação, onde é feita uma descrição dos participantes no estudo e serão apresentados os procedimentos e instrumentos de recolha e análise de dados.

No quinto capítulo será realizada a análise dos dados em duas grandes categorias: conceito de função e aprendizagens desenvolvidas. A primeira dá especial atenção ao conceito de função dos alunos numa fase inicial do projeto, onde se pretende-se analisar o nível de compreensão do conceito por parte dos alunos e identificar as dificuldades iniciais dos alunos relativamente à compreensão do conceito de função. Entende-se como fase inicial do projeto o período que ocupa as duas primeiras semanas de aulas. Tentando analisar como evoluiu o conceito de conceito de função por parte dos alunos ao longo de uma unidade de ensino que promove as conexões entre diferentes representações, surge a segunda categoria onde analiso as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos, bem como a evolução das mesmas, na aprendizagem das seguintes funções: afim, definida por ramos e quadrática.

Por fim, e em jeito de conclusão tem-se o último capítulo, em que procuro responder às questões do estudo e se tecem algumas considerações finais relevantes sobre todo o trabalho de projeto.

2. Enquadramento curricular e didático

A elaboração de uma unidade de ensino pressupõe um enquadramento relativamente ao que os alunos aprenderam em anos letivos anteriores e às aprendizagens visadas para o ano letivo em causa e seguintes. Relativamente ao ensino básico, os alunos alvo da unidade de ensino concluíram-no no ano letivo 2013/2014 (ou ainda anteriormente, no caso dos alunos repetentes). Nesse período encontrava-se em vigor o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2001a), pelo que será sempre a este que me referirei quando comentar algum aspeto deste nível de escolaridade. Já o Programa de Matemática A do ensino secundário em causa neste estudo, tendo a unidade de ensino sido desenvolvida no ano letivo 2014/2015, é o que foi publicado em 2001 (ME, 2001b).

A criação de uma unidade de ensino pressupõe também um estudo aprofundado e um conhecimento teórico sólido sobre os temas abordados na mesma, no que diz respeito às orientações curriculares e didáticas em causa, mas também no que concerne aos fundamentos teóricos no campo da Didática da Matemática que a suportam e lhe servem de base. Assim, este capítulo inicia com um enquadramento teórico sobre aspetos de grande importância quanto ao processo de ensino-aprendizagem das funções, nomeadamente relativas às dificuldades de compreensão do conceito de função e às conexões entre diferentes representações. Finaliza depois com algumas orientações curriculares e didáticas consideradas essenciais ao ensino das funções e que serviram de base à elaboração da unidade de ensino.

2.1. A aprendizagem do conceito de função

O conceito de função

O conceito de função é central no ensino da matemática mas carrega com ele uma série de dificuldades (Akkus, Hand & Seymur, 2008). A aprendizagem do conceito de função desenvolve-se ao longo de vários anos e é mais complexa do que se supõe implicitamente quer na conceção de currículos quer no seu ensino (Akkoç & Tall, 2005; Chorlay, 2009).

A nível da educação matemática nacional, os manuais escolares apresentam a definição de função como sendo toda e qualquer correspondência entre dois conjuntos A e B, não vazios, que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B. Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon e Reed (2012) consideram que constitui por si só um grande desafio educacional tentar fazer perceber aos alunos todas as facetas do conceito função. Os autores consideram que entender uma função como sendo algo que transforma um conjunto de valores noutros valores pode ser um pouco redutor. De facto, é nessa "faceta" que se insiste tanto no ensino básico como no secundário em Portugal. Este carácter operacional contrasta com um outro mais estruturado e através do qual se estudam várias propriedades, por vezes apenas trabalhado mais em níveis de escolaridade mais avançados. Neste sentido, as funções são encaradas como objetos matemáticos passíveis de serem representados de várias formas, categorizados segundo as suas propriedades e com a possibilidade de serem submetidos a processos de ordem superior, como por exemplo os de diferenciação e de integração.

Conceito imagem e conceito definição

Vinner (1989) refere que a imagem mental que os estudantes desenvolvem acerca das funções pode ser diferente da sua definição matemática e daquela que os professores ensinam. O autor entende duas grandes dificuldades no processo de ensino-aprendizagem das funções: dificuldade na compreensão do conceito em si por parte dos alunos e dificuldade do professor em saber se o conceito está ou não bem formado pelos alunos. Para ajudar na compreensão do processo que envolve a aprendizagem e a compreensão do conceito de função o autor recorre a um modelo explicativo apoiado em duas noções chave: conceito imagem e conceito definição. O conceito imagem está relacionado com todas as imagens mentais e propriedades que estão associadas ao conceito de função e o conceito definição tenta explicar verbalmente o conceito de função. O conceito imagem é fundamental para a compreensão do conceito definição e para a consequente desejável compreensão do conceito de função. Vinner (1989) evidencia a importância da conjugação recíproca destes dois conceitos e reconhece que tal é possível no confronto de várias representações de uma mesma função.

A definição formal de um conceito e os processos cognitivos envolventes à sua compreensão são, assim, diferenciados por Tall e Vinner (1981), onde a primeira está associada ao conceito definição (ajuda a especificar o conceito de função) e os segundos ao conceito imagem (estrutura cognitiva que é construída ao longo do tempo). Os autores consideram que o conceito definição, quando existe, é, no fundo, a forma que os alunos usam para evocar o conceito de função, daí poder transformar-se com o tempo e variar consoante as situações apresentadas. Assim, determinados conceitos definição geram determinados conceitos imagens o que faz com que, como já foi referido, nem sempre a imagem mental que os estudantes desenvolvem acerca das funções coincida com a sua definição matemática.

Consciência (2013) mostra no seu trabalho como a calculadora gráfica pode funcionar como um facilitador no confronto dessas várias representações. Este recurso pode contribuir para o desenvolvimento do conceito imagem de função por parte dos alunos, ou seja, segundo a autora, “no desenvolvimento de toda a estrutura cognitiva associada ao conceito, o que inclui imagens mentais, propriedades e processos” (p. 10).

Visão operacional e visão estrutural

Sfard (1991) explica que, relativamente à compreensão do conceito de função, a passagem da visão operacional (como processo) para a estrutural (como objeto) pode ser realizada por três fases: 1- interiorização; 2- condensação; 3 – reificação. Quando a função é entendida com um objeto e não apenas encarada como uma representação de si mesma as três fases estão completas e a função é vista como um objeto matemático. A autora reconhece que é usual os alunos identificarem uma função com uma das suas representações. Consciência (2013) reconhece que a calculadora gráfica na aprendizagem das funções “dá particular destaque à natureza dual do conceito, e à sua evolução, de uma visão operacional para uma visão estrutural, sendo esta indispensável para compreender determinadas operações e transformações de funções” (p.63). A autora faz referência a Slavit (1997) que menciona a calculadora gráfica como um modo “de se atingir a reificação quando o ensino envolve preferencialmente tecnologias gráficas, não pretendendo substituir a teoria da reificação mas estendê-la" (Consciência, p.63).

Aspetos procedimentais e aspetos concetuais

Duval (1995) reconhece que as atividades cognitivas relacionadas com a aprendizagem da matemática são semelhantes a outras atividades humanas no que diz respeito ao uso de sistemas de expressão e representação como os que se fazem, por exemplo, na linguagem natural, nos sistemas de escrita de números, nas escritas algébricas, nas notações simbólicas formais, nas figuras geométricas planas ou em perspetiva, nos gráficos cartesianos, nos diagramas, etc. Para o autor as representações mentais não podem ser consideradas independentes das representações semióticas pois não há *noésis* sem *semiósis*, ou seja, a apreensão conceitual de um objeto matemático depende da produção e coordenação de diferentes representações semióticas. Os objetos matemáticos são, assim, acessíveis apenas através de representações semióticas e o confronto com representações diferentes é benéfico. Duval (2006) entende que existem dois tipos de transformações de representações semióticas e que estas devem ser dominadas pelos alunos: os tratamentos e as conversões. Os primeiros são usados para transformações dentro do mesmo registo de representação (na manipulação algébrica, por exemplo) e as conversões são usadas para transformações entre diferentes registos de representações (quando, por exemplo, os alunos transformam a representação algébrica de uma função numa representação gráfica). O trabalho dentro do mesmo registo é mais fácil para os alunos, daí o autor considerar que os tratamentos são mais acessíveis que as conexões. Estas últimas exigem um reconhecimento de um mesmo objeto matemático perante diferentes representações que, aparentemente, podem não ter nada em comum. O processo de conversão exige alterações a nível de representações, o que conduz a alterações a nível dos meios de tratamento, como também a nível das propriedades que podem igualmente ser explicitadas.

O reconhecimento por parte do aluno de um mesmo objeto em diferentes representações é fundamental para a compreensão matemática. Para além disso, é fundamental que em cada representação o aluno seja capaz de retirar as informações mais relevantes que a mesma facilita. Também é desejável que o aluno seja capaz de saber escolher, em diferentes situações, qual é a representação que melhor se adequa.

Scheuermann e Garderen (2008) referem que há representações mais favoráveis que outras perante diferentes situações e que é importante perceber porque é que os alunos dão preferência a umas e não a outras. Procedimentos como a escolha de uma representação em detrimento de outra revelam conhecimentos profundos sobre determinado conceito, nomeadamente o de função (Arcavi, 2003).

As conexões entre diferentes representações

Relativamente às dificuldades envolvidas no processo de ensino-aprendizagem das funções são vários os autores que as relacionam precisamente com a existência de várias formas de representar uma função, bem como com as dificuldades nas conexões entre as mesmas (Artigue, 1992; Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007). Para a compreensão do conceito é fundamental o confronto com as diferentes representações das funções, no entanto, é também, paradoxalmente, um fator adicional de criação de dificuldades.

Consciência (2013) observa que a conversão entre as representações algébrica e gráfica de funções pode ser favorecida com a fluência na manipulação algébrica, isto é, através da insistência nos tratamentos dentro do sistema de representação algébrica. Trata-se de um domínio em que os alunos revelam bastantes dificuldades. A autora considera que uma boa compreensão do conceito de função e das suas propriedades passa por aí, mas também pela criação de momentos de reflexão sobre os procedimentos utilizados, bem como pela criação de tarefas que se apoiem na representação gráfica, como por exemplo, transformações de funções, onde é possível confrontar facilmente a representação gráfica com a algébrica.

Candeias (2010), que estudou as dificuldades no processo ensino-aprendizagem de funções no 8.º ano de escolaridade, também conclui que as dificuldades de apreensão e aplicação do conceito de função podem ser minimizadas quando são usadas diferentes representações de funções.

Azevedo (2009) refere que os alunos tendem a apoiar-se na memorização de técnicas que não dominam e que são aplicadas sem compreensão. A autora aponta várias dificuldades dos alunos no trabalho com funções racionais, nomeadamente no estabelecimento de relações entre diferentes formas de representar uma função. Um dos obstáculos no estudo das funções reside precisamente neste ponto, onde é sabido que muitos alunos têm dificuldade no estabelecimento de conexão entre diferentes representações de funções, ficando assim comprometida a compreensão das propriedades de cada função (Artigue, 1992; Elia et al., 2007; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998). Sajka (2003) acrescenta ainda que se torna redutor um professor, em contexto de sala de aula, confrontar os alunos maioritariamente com apenas duas representações como é o caso da representação algébrica e gráfica de uma função. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) referem que a conversão da representação gráfica para analítica é mais difícil por envolver a deteção de padrões, enquanto a conversão reciproca envolve uma série de passos diretos (definição de pares ordenados, representação dos mesmos no referencial cartesiano e união dos mesmo por uma linha).

Guerreiro (2009) reconhece que o confronto de todas as representações possíveis é fundamental para a aprendizagem das funções. A autora reconhece que as mesmas, quando articuladas, constituem instrumentos importantes na resolução de problemas e identifica essa mesma articulação como uma das principais dificuldades na aprendizagem das funções, sobretudo quando surge a representação algébrica.

Ronda (2015) reconhece que cada tipo de representação de funções desfruta de pontos fortes, mas também pode acarretar algumas limitações. A autora refere que as estratégias usadas, os processos e as propriedades das funções com que os estudantes trabalham conduzem no seu conjunto a diferentes níveis de compreensão do conceito de função. Para além disso, reconhece que há fatores que influenciam a conexão entre diferentes representações, como por exemplo, o tipo de função em causa. A autora enfatiza um ponto de extrema importância na conexão entre diferentes representações: o confronto com múltiplas representações de um único objeto ajuda a desenvolver um sentido subjetivo de invariância, possibilitando que os alunos vejam não só a função representada de forma diferente mas possibilitando a observação das propriedades invariantes das funções de formas diferentes. Pode então concluir-se que confrontar os alunos com múltiplas representações de funções permite construir um todo que é em si muito mais do que a soma de todas as partes (Kaput, 1989, citado por Ronda, 2015). Esse confronto permite observar a função representada de formas diferentes, mas também permite observar as propriedades invariantes de cada função quando representada de formas diferentes.

Dado o exposto anteriormente, é evidente que o confronto com diferentes representações de funções é fulcral na compreensão do conceito de função e no próprio processo de ensino-aprendizagem das funções. Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) reconhecem isso mesmo e referem que "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p.75).

Linguagem simbólica

Os alunos revelam dificuldades na linguagem simbólica usada no estudo das funções. Não compreendem a simbologia *x*, *y* e *f(x)* e não conseguem facilmente passar informação de uma representação para outra. Ponte, Branco e Matos (2009) consideram que uma forma de ultrapassar estas dificuldades pode passar por confrontar os alunos com diferentes tipos de representações através de tarefas contextualizadas e de resolução de problemas para que se apropriem progressivamente da simbologia matemática. Esta opinião é também apoiada por Saraiva e Teixeira (2009), que consideram que as dificuldades simbólicas no estudo das funções podem ser colmatadas com a introdução de tarefas de natureza diversa capazes de ajudarem progressivamente no desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos. A capacidade de os alunos trabalharem com os símbolos é fundamental para a compreensão estrutural de uma função.

Para além do referido, a própria terminologia usada no contexto das funções (domínio, contradomínio, objeto e imagem, por exemplo) é complexa, principalmente quando surge em situações exclusivamente matemáticas, sem um contexto real (Ponte, Branco & Matos, 2009), o que pode constituir por si só mais uma dificuldade acrescida no processo de ensino-aprendizagem das funções.

2.2. O estudo das funções no 3.º ciclo do ensino básico

O capítulo das funções está presente nos vários ciclos de ensino, desde o básico ao secundário, tendo um peso bastante superior neste último. Já no 2.º ciclo são trabalhadas situações que envolvem proporcionalidade direta, relações, padrões geométricos e regularidades. No 3.º ciclo é aprofundado o estudo das relações e são trabalhadas a proporcionalidade direta e inversa como funções. No ensino básico, a introdução destes exemplos tem como principal objetivo desenvolver o conceito de função, resolvendo problemas da vida corrente, de matemática e de outras ciências. Desta forma, de acordo com o programa vigente na época (PMEB), é possível serem introduzidas "funções associadas à modelação de situações da realidade" (ME, 2007, p.55), desenvolvendo assim o propósito principal de ensino de

> Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos. (idem, p.55)

Considera-se que com a aprendizagem das funções, a nível do ensino básico, os alunos sejam capazes:

> de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos; de compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa e inversa; de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos; de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos. (ME, 2007, p.55)

As orientações metodológicas do PMEB são intencionalmente propostas com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, onde se aposta, por exemplo, no estudo das relações de diversos tipos, assumindo as funções um papel importante, onde a experiência formal deverá ser anteriormente complementada pela informal. Alguns dos objetivos específicos do ensino básico (3.º ciclo) no que diz respeito às funções eram os seguintes:

- compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações;

- analisar uma função a partir das suas representações;

- interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante;

- representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim;

- representar graficamente funções do tipo $y=ax^2$;

- relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas;

- resolver e formular problemas, e modelar funções utilizando funções.

Procurando dar cumprimento aos objetivos, a resolução de problemas e a modelação de situações já eram aspetos privilegiados e o recurso à tecnologia surgia como auxiliar na realização de tarefas e nas conversões entre representações algébricas e gráficas. As funções estudadas pelos alunos no ensino básico foram as seguintes: linear, afim, do tipo $y=k/x$ e quadráticas simples da forma $y=ax^2$ (k e a não nulos).

2.3. Orientações para o estudo das Funções I no ensino secundário

No ensino secundário o capítulo das funções recebe especial destaque ocupando quase 40% dos conteúdos programáticos ao longo dos três anos que o compõem. As indicações metodológicas constantes do programa de Matemática A (ME, 2001b) defendem que os conceitos devem ser construídos a partir da experiência de cada aluno e de situações concretas, estabelecendo maior ligação entre a matemática e a vida real, a tecnologia e questões de outras disciplinas. É referida a importância de saber retirar partido de recursos existentes, nomeadamente a calculadora gráfica e o computador, assim como confrontar os alunos com as limitações das mesmas.

Trata-se de um tema que exige um conjunto vasto de pré-requisitos por parte dos alunos. Conteúdos trabalhados no ensino básico (ME, 2007) são fundamentais, tais como: os conjuntos numéricos, a resolução de equações e inequações e as generalidades sobre funções lineares, afins, de proporcionalidade inversa e quadrática (para casos particulares). Para além destes, as capacidades transversais como a resolução de problemas e a comunicação matemática são também essenciais no ensino secundário. O PMEB (ME, 2007) dava uma atenção particular às capacidades referidas. A compreensão da matemática exige o desenvolvimento destas e de outras capacidades que alguns dos objetivos do ensino básico (ME, 2007) procuram alcançar, a saber, a capacidade de: lidar com ideias matemáticas em diversas representações; comunicar as suas ideias organizando e clarificando o seu pensamento; raciocinar matematicamente; fazer Matemática de modo autónomo; resolver problemas e; estabelecer conexões entre diferentes situações matemáticas e não matemáticas.

Consideram-se assim, apontados alguns dos pilares facilitadores do bom desenvolvimento da compreensão matemática dos alunos que frequentam a disciplina de Matemática A no ensino secundário. No 10.º ano de escolaridade o capítulo das funções é desenvolvido nos seguintes domínios:

1- Função, gráfico e representação gráfica;
2- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos;
3- Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4);
4- Possibilidade da decomposição de um polinómio em fatores.

No primeiro ponto é sugerido que sejam "dados exemplos a partir de situações concretas (…). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos de Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos do capítulo anterior [Geometria no Plano e no Espaço I]" (ME, 2001b, p.27). No segundo ponto é esperado que o estudo intuitivo de propriedades de funções e dos seus gráficos seja realizado não só com lápis e papel mas também com auxílio da calculadora gráfica e nos seguintes aspetos: "domínio, contradomínio, pontos notáveis (interseção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação aos eixos dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos" (ME, 2001b, p.28). Relativamente aos dois últimos pontos, a modelação matemática e a resolução de problemas assumem especial destaque, onde "o estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado" e ainda "a resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica e gráfica" (ME, 2001b, p.28).

A unidade de ensino criada no âmbito deste estudo abrange cada um dos pontos apresentados, dando especial relevo aos três primeiros, aquando do estudo das seguintes funções: função afim; função definida por ramos; função quadrática. Uma vez que na unidade de ensino não constam funções polinomiais de grau superior a 2, o ponto 4 apenas é abordado para a função quadrática. As orientações curriculares da unidade de ensino elaborada seguem as que constam no programa nacional de matemática do ensino secundário. Este recomenda uma abordagem múltipla relativamente aos diferentes tipos de funções reais de variável real a estudar, assim como relativamente às diferentes representações das mesmas:

> A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico – sobre tipos simples de funções, desde as algébricas inteiras (que são as tratadas no 10.º ano), passando pelas fracionárias e acabando nas transcendentes - exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas. (ME, 2001b, p.9)

Um ponto característico presente na unidade de ensino é a conexão entre diferentes representações de funções, como forma de promover o desenvolvimento do conceito de função. Este é abordado através do estudo de três tipos de funções: função afim, função definida por ramos e função quadrática. Relativamente a objetivos gerais a nível de conhecimentos, o programa refere que é fundamental procurar desenvolver nos alunos a capacidade de "interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, por via intuitiva, analítica e usando calculadora gráfica" (ME, 2001, p.10).

Tratando-se de um tema trabalhado em anos letivos anteriores, procurou-se estabelecer, sempre que possível, relação com o que os alunos já conheciam e com o que já haviam trabalhado. Mesmo dentro da própria unidade de ensino procurou-se construir o conhecimento com base nos conhecimentos construídos na mesma numa fase inicial. Considero, portanto, que as conexões entre diferentes áreas é fundamental, tanto de uma forma transversal (entre diferentes áreas e/ou ciências), como horizontal (dentro da mesma área), assumindo assim o estudo do tema "Funções e Gráficos" a seguinte característica:

> Este tema tem uma ênfase muito grande na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas. Esta ligação é muito importante para todos os que utilizarem matemática. A capacidade e as relacionar é uma capacidade fundamental para o mundo de hoje e do futuro e assim este tema deverá fornecer uma formação para a vida toda tão básica como a tabuada. (ME, 2001b, p.26)

As estratégias adotadas são maioritariamente de caráter exploratório, onde as tarefas propostas contemplam "a análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução", (ME, 2001b, p.11). Procurando construir o conhecimento a partir do que os alunos já sabem (Ausubel, 2002) e procurando diversificar o processo de ensino-aprendizagem podem encontrar-se várias tarefas em conformidade com o que é exigido no programa: exercícios, problemas, explorações e investigações (Ponte, 2005). Procurou-se, nas várias tarefas apresentadas, confrontar os alunos com diferentes representações de funções de forma a potenciar situações em que as conexões entre diferentes representações fossem constantes. Desta forma, o ensino da Álgebra, e em particular com o tema das funções, poderá levar os alunos a:

> (i) "compreender regularidades, relações e funções;
> (ii) representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos;
> (iii) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
> (iv) analisar a mudança em vários contextos."
>
> (NCTM, 2007, p. 353)

A calculadora gráfica constituiu um recurso recorrente, assumindo fundamentalmente um papel auxiliar para cálculos e um papel mais destacado para representações gráficas de funções, nomeadamente para o estudo de transformações de funções afins. A conexão entre as funções e a geometria é evidente e a realização de pequenas investigações pode tomar lugar. Na unidade de ensino procurou-se também seguir a seguinte recomendação: "o estudo das transformações simples de funções deve ser feito tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador; a função f tanto pode ser dada a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica" (ME, 2001b, p.28). A calculadora gráfica, material obrigatório, é assumida como um auxiliar principalmente na resolução de problemas, de explorações e de investigações (NCTM, 2007), podendo ajudar os alunos no desenvolvimento do conceito de função e ainda facilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico e facilitar a conversão entre diferentes representações de uma mesma função (Kieran, 2007).

3. A unidade de ensino

A proposta pedagógica a seguir apresentada foi elaborada como suporte ao estudo do presente trabalho de projeto e teve, portanto, como principais objetivos a criação e a aplicação de tarefas visando desenvolver o conceito de função por parte dos alunos de 10.º ano (Matemática A), do curso de ciências socioeconómicas. Seguindo as orientações curriculares e didáticas apresentadas no capítulo anterior, a proposta pedagógica foi construída atribuindo especial relevo às conexões entre as diferentes representações de uma função, acreditando na mais-valia que esse mesmo aspeto pode constituir no desejado desenvolvimento do conceito de função.

3.1. O contexto escolar

Caracterização da escola

A unidade de ensino foi realizada numa escola secundária, sede de agrupamento, pertencente ao concelho de Oeiras. A escola iniciou a sua atividade em 1985. Encontra-se situada numa zona residencial, bastante arborizada, ocupando uma área de 3,9 hectares. A oferta escolar da escola abrange vários níveis de ensino: 7.º, 8.º e 9.º anos do ensino básico; 10.º, 11.º e 12.º anos do ensino secundário; 1.º, 2.º e 3.º ano dos cursos profissionais do ensino secundário (técnico de gestão de programação e sistemas informáticos e técnico de comércio).

Caracterização da turma

A unidade de ensino foi concebida para ser aplicada numa turma de 10.º ano da área de economia. A turma é composta por 25 alunos: 18 rapazes e 7 raparigas. A maioria dos alunos já frequentava a escola no ano letivo anterior e mora nas proximidades da escola.

As idades dos alunos da turma distribuem-se da seguinte forma: um aluno com 18 anos, um aluno com 17 anos, quatro alunos com 16 anos, dezasseis alunos com 15 anos e três alunos com 14 anos. A escolha dos alunos pelo curso de ciências socioeconómicas deve-se fundamentalmente ao gosto pelas disciplinas que o integram, bem como pelos bons resultados no ensino básico nas disciplinas que têm continuidade no ensino secundário. No início do ano letivo, quando questionados sobre o que podem mudar para se adaptarem às exigências do ensino secundário, os alunos consideram como principais pontos as seguintes atitudes: "tentar encontrar nas disciplinas assuntos de interesse" (13 alunos), "prestar mais atenção nas aulas" (22 alunos), "alterar a minha atitude face às minhas obrigações escolares" (18 alunos). Dos 25 alunos, seis encontram-se a repetir o 10.º ano, três pretendem mudar de área e outros três ainda se encontram indecisos.

O conselho de turma considera os alunos muito bem-educados, disciplinados e cumpridores. Trata-se, no geral, de uma turma com bom aproveitamento e cujo comportamento nas aulas de matemática é adequado, tratando-se de estudantes empenhados e interessados.

No primeiro período do ano letivo 2014/2015, os alunos obtiveram os seguintes resultados na disciplina de matemática:

Classificações	**3**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
N.º de alunos	1	1	1	2	1	2	2	5	1	3	2	1	1	1	1

Tabela 1 – Classificações da turma em matemática no 1.º período (2014/2015)

A turma apresenta, assim, uma percentagem de 24% de classificações inferiores a 10 (Insuficiente). A percentagem de alunos com classificações entre 10 e 13 (Suficiente) é de 40%, entre 14 e 17 (Bom) é de 24% e entre 18 a 20 (Muito Bom) é de 12%. No final do 1.º período, a classificação mais alta foi de 20 valores e a mais baixa de 3 valores. A média global da turma foi de 12,08 valores, com mediana e moda iguais a 12 valores. De notar que a nota de três valores corresponde à avaliação de uma aluna que estava inscrita na turma apenas para estar a frequentar o ensino secundário enquanto não tinha vaga num curso específico. A aluna acabou por não fazer parte da turma no final do segundo período.

3.2. Plano da unidade de ensino

A aplicação da unidade de ensino decorreu no ano letivo de 2014/2015, de 16 de janeiro a 13 de março de 2015. Ocupando quase todo o segundo período de aulas totalizou 40 tempos de 45 minutos, o que equivale a 20 blocos de 90 minutos (aproximadamente sete semanas). A planificação inicial sofreu alguns ajustes ao nível da organização dos tempos previstos devido à realização de atividades extracurriculares não contempladas inicialmente e que interferiram com as aulas de matemática (nomeadamente a realização das provas de aferição para participação no concurso Canguru Matemático Sem Fronteiras 2015 no dia 11 de fevereiro e a realização de uma visita de estudo a 27 de fevereiro).

Procurou-se que a unidade de ensino promovesse a conexão entre diferentes representações para cada uma das funções estudadas. Ronda (2015) refere a importância das múltiplas representações de funções, enfatizando a conexão entre elas como modo de promover o desenvolvimento do conceito de função por parte dos alunos.

Compreendendo que a experiência matemática dos alunos é enriquecida se a sua atividade matemática contemplar a resolução de situações do quotidiano, envolvendo o uso das tecnologias (nomeadamente com a exploração de ambientes de geometria dinâmica ou com o uso da calculadora gráfica), tornou-se o uso da calculadora gráfica recorrente (ME, 2001b). Procurou-se também que as limitações das mesmas fossem reconhecidas pelos alunos, confrontando-os com situações, por exemplo, onde fosse visível a importância do retângulo de visualização. Foi sugerido que os alunos traçassem um número apreciável de funções tanto manualmente, através dum simples esboço ou usando papel quadriculado, como também recorrendo à calculadora gráfica. Desta forma, relativamente aos recursos, tal como foi referido no capítulo anterior, pressupôs-se assim ir além do lápis e papel (caderno diário, fichas, manual escolar, entre mais), abrangendo também a tecnologia através do uso da calculadora gráfica e do computador (nomeadamente com algumas apresentações feitas pela professora no ambiente de geometria dinâmica Geogebra).

Os momentos de avaliação globais dos conhecimentos dos alunos foram realizados em duas ocasiões distintas, nas datas dos testes de avaliação. No entanto, ao longo da unidade de ensino e a nível de sala de aula, tentou-se que a avaliação dos alunos abrangesse vários domínios, nomeadamente os seguintes: respeito pelas normas de trabalho e de convivência; interesse/empenho; capacidade de síntese e de análise; qualidade da participação oral; cooperação no grupo; concretização da atividade.

A aplicação da unidade de ensino pressupôs uma série de pré-requisitos que possibilitassem a aquisição e a compreensão dos novos conceitos a estudar. Os conhecimentos prévios exigidos para o estudo das diversas fases da unidade de ensino podem ser observados no seguinte quadro, a par do material e dos recursos necessários.

	Generalidades	**Função Afim e Ramos**	**Função quadrática**
Conhecimentos prévios	Funções (ens.básico); Conjuntos numéricos; Equações; Inequações.	Funções (ens.básico); Conjuntos numéricos; Equações e inequações; Generalidades sobre funções (Funções, 1.º sub-tema, 10.º ano).	Funções (ens.básico). Conjuntos numéricos. Equações e inequações de 1º grau (8.º e 9.º ano); Equações de 2.º grau (9.º ano); Generalidades sobre funções (10.º ano – Funções, 1.º sub-tema); Função afim; Funções definidas por ramos.
Material	Manual de Matemática A adotado e caderno de exercícios; Fichas de Trabalho; Caderno diário; Material de escrita; Calculadora gráfica; Computador; Ambiente de geometria dinâmica.		
Outros Recursos	PowerPoint; Escola virtual; E-manual; Teste de avaliação.		
Avaliação	Avaliar a intervenção dos alunos ao longo da aula, através dos seguintes registo: - Respeito pelas normas de trabalho e de convivência; interesse/empenho; capacidade de síntese e de análise; qualidade da participação oral; cooperação no grupo; concretização da atividade; Avaliar os conhecimentos dos alunos por meio de dois testes de avaliação.		

Quadro 1 – Conhecimentos prévios, material, recursos e avaliação

A planificação apresentada foi elaborada com base na antevisão do pensamento dos alunos e com vista à produção do conhecimento de uma forma coerente e interligada. Por forma a diversificar as abordagens metodológicas, foi desenvolvida uma série de tarefas com os alunos. Pode encontrar-se, na planificação pormenorizada (anexo 3), a seleção das tarefas do manual escolar dos alunos, para além das fichas de trabalho e de avaliação produzidas (anexos 4 a 17).

Apresenta-se de seguida uma planificação sintetizada da unidade de ensino aplicada, que, como referido no referido no capítulo anterior, com maior detalhe, foi criada com base no programa de Matemática vigente (ME, 2001b) e com objetivo de promover o desenvolvimento do conceito de função. A unidade de ensino promove as conexões entre diferentes representações de funções (Ronda, 2015), procura desenvolver a visão operacional do conceito de função, com vista a uma visão estrutural (Sfard, 1991) e procura também desenvolver os aspetos concetuais e não só procedimentais inerentes ao conceito de função por parte dos alunos (Duval, 2006).

<table>
<tr><th colspan="2">Tópicos</th><th>Tarefas</th><th>Blocos (90´)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Funções e gráficos: generalidades</td><td>Generalidade sobre funções</td><td>F1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Generalidades sobre funções</td><td rowspan="3">F2</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>Função, gráfico e representação gráfica</td></tr>
<tr><td>Formas de representar uma função</td></tr>
<tr><td>Estudo intuitivo de propriedades de funções e dos seus gráficos</td><td>F3</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Função afim</td><td>Definir função afim</td><td rowspan="4">F4</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td>Representar função afim graficamente</td></tr>
<tr><td>Interseção do gráfico da função afim com o eixo Oy</td></tr>
<tr><td>Propriedades da função afim</td></tr>
<tr><td>Na calculadora gráfica</td><td rowspan="2">F5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Experimentar e conjeturar</td></tr>
<tr><td>Transformações de funções afins</td><td rowspan="2">F6</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Influência do parâmetro m e b</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Função def. por ramos</td><td>Definir funções definidas por ramos</td><td rowspan="3">F7</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>Diferentes representações da função definida por ramos</td></tr>
<tr><td>Resolver problemas - função afim e função definida por ramos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teste de avaliação</td><td>Teste 1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="12">Função quadrática</td><td>Definir e identificar funções quadráticas</td><td rowspan="5">F8</td><td rowspan="5">1</td></tr>
<tr><td>Sentido da concavidade do gráfico da função quadrática</td></tr>
<tr><td>Determinar coordenadas do vértice</td></tr>
<tr><td>Determinar equação do eixo de simetria</td></tr>
<tr><td>Determinar contradomínio</td></tr>
<tr><td>Determinar interseção do gráfico com os eixos coordenados</td><td rowspan="7">F9
F10
F11
F12</td><td rowspan="7">7</td></tr>
<tr><td>Determinar os zeros (fórmula resolvente)</td></tr>
<tr><td>Determinar o número de zeros (binómio descriminante)</td></tr>
<tr><td>Resolver inequações de 2.º grau</td></tr>
<tr><td>Resolução de problemas</td></tr>
<tr><td>Estudar a monotonia</td></tr>
<tr><td>Estudar a influência de a, h e k no gráfico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teste de avaliação</td><td>Teste 2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Total</td><td>20</td></tr>
</table>

Quadro 2 - Síntese da planificação da unidade de ensino

3.3. As estratégias adotadas

As estratégias de ensino adotadas assumem fundamentalmente um carácter exploratório. Procurando diversificar todo o processo de ensino-aprendizagem, têm especial relevo as tarefas de investigação e de exploração, seguidas de discussões gerais com o grupo turma. As tarefas propostas foram maioritariamente planificadas para serem resolvidas em grupos de dois alunos. Apenas foram planeados para resolução individual a ficha de trabalho 1 e os dois testes de avaliação. De notar que, apesar da metodologia adotada privilegiar o trabalho a pares, neste o trabalho individual também existe e é fundamental, sendo o motor de arranque de todo o trabalho desenvolvido.

A metodologia adotada privilegiou o trabalho a pares e a realização das tarefas manteve os mesmos moldes desde o início do ano letivo, englobando as seguintes estratégias sequenciais: 1- após a distribuição da tarefa, os alunos realizam uma leitura individual dos enunciados, para compreensão e interpretação do solicitado; 2- resolução a pares da tarefa; 3- discussão geral, onde elementos dos grupos expõem as resoluções e todo o grupo turma participa; 4- consolidação dos conteúdos e conclusões, onde eu, com a colaboração dos alunos, sintetizo os conteúdos abordados. Toda esta dinâmica é característica de uma metodologia de ensino-aprendizagem exploratório, onde "(…) o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p. 13). Torna-se cada vez mais fundamental criar espaço para os alunos desenvolverem ideias matemáticas com vista à promoção do raciocínio matemático e à construção do conhecimento baseado na discussão coletiva, onde o ensino exploratório pode assumir um papel primordial.

Na perspetiva deste tipo de ensino são apresentadas quatro fases na aula que são categorizadas por Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) por: 1) Introdução da tarefa; 2) Desenvolvimento da tarefa; 3) Discussão da tarefa, e 4) Sistematização das aprendizagens matemáticas. Em cada uma das fases os objetivos principais a desenvolver centram-se nas aprendizagens matemáticas dos alunos e na gestão da dinâmica dos alunos e do grupo turma em si. Os autores referem que a professora funciona como uma orquestradora que assume mais ou menos relevo em diferentes momentos. É, assim, evidenciado o carácter multidimensional e relacional do ensino, que assumindo uma complexidade superior no ensino exploratório, implica uma dificuldade acrescida às ações do professor, que dependem em muito das interpretações e explorações dos alunos.

Na aplicação da unidade de enino, aquando da realização das fichas de trabalho, todos os alunos possuíam uma ficha onde escreviam as respostas elaboradas pelo par. Ao finalizarem a resolução, os grupos decidiam qual o elemento que, alternadamente, me entregava a ficha. Aquando da discussão geral, eu já possuía uma ficha com a resolução de todos os grupos. Por fim, era distribuída por grupo uma ficha em branco para que o elemento que entregava a ficha pudesse corrigir e guardar para seu estudo pessoal a ficha em causa. O outro elemento do grupo corrigia na ficha que possuía as respostas e, desta forma, todos os elementos da turma ficavam com a resolução correta das fichas.

Nas três primeiras fases apontadas (leitura, resolução a dois e discussão geral) assumo maioritariamente um papel de mediadora, e, portanto, circulava pela sala enquanto os grupos discutiam ideias e formulavam as respostas. Sempre que solicitada esclarecia dúvidas, de forma a não dar as respostas, mas sim conduzir os alunos às mesmas. Desta forma, são os alunos que assumem papel primordial no decorrer destas primeiras fases da aula, construindo o conhecimento, estabelecendo conflitos sociocognitivos (Vygostky, 1989) e discutindo e justificando ideias. Aquando das discussões gerais são os alunos que continuam com o “papel principal” e no final do percurso são realizadas as consolidações necessárias e/ou apanhados gerais em conjunto comigo. Para além deste papel mais ativo nessa última fase da aula, também assumi papel de relevo no início das aulas, na medida em que estabeleci ligações com aulas e/ou conceitos anteriores necessários à aula em questão.

Todo o processo de ensino-aprendizagem adotado assume assim uma natureza maioritariamente exploratória (Ponte, 2005) na medida em que se rege pelas seguintes caraterísticas: “ênfase nas atividades de exploração, incluindo possivelmente também algumas investigações, problemas e exercícios” (Ponte, 2005, p.14); valorização dos momentos de reflexão e discussão como etapa fundamental no estudo de um novo assunto (Ponte, 2005); o docente assume um papel mediador da aprendizagem, na medida em que “… cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adotando uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa” (ME, 2001, pág. 9). Procurou-se possibilitar aos alunos o contacto com tarefas onde fosse necessário “interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos” (ME, 2001, p.4). As tarefas contextualizadas assumem aqui especial destaque, contribuindo para as seguintes finalidades da disciplina de matemática do ensino secundário: “Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real” e “Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (ME, 2001, p.3).

Relativamente à metodologia de trabalho adotada nestas aulas, há a acrescentar que o grupo turma foi subdividido em onze grupos de trabalho. Estes foram formados na segunda aula de implementação da unidade de ensino e, depois da mesma, os alunos trabalharam sempre aos pares, à exceção das aulas em que foram realizados os testes de avaliação. Na primeira aula de implementação do projeto foi realizada a ficha de trabalho 1. Trata-se de uma ficha de avaliação diagnóstica, daí ter sido realizada individualmente. Os grupos foram formados por mim e a turma encontrava-se sentada numa planta de sala de aula também elaborada por mim. Os critérios de formação dos grupos têm por base o comportamento, o aproveitamento e a heterogeneidade de sexo.

3.4. As tarefas

Procurando possibilitar a construção do conhecimento partindo do que os alunos já sabem (Ausubel, 2002) e tentando diversificar o processo de ensino-aprendizagem a criação de tarefas diversificadas foi constante, podendo ser encontrados exercícios, problemas e atividades de exploração e/ou investigação (Ponte, 2005). As tarefas propostas são variadas, assumindo especial destaque as tarefas de caracter exploratório que contemplam "a análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução" (ME, 2001, p.11). As fichas de trabalho apresentam uma base comum relativamente ao facto de priorizarem as múltiplas representações de funções e as suas explorações e de incentivarem a conexão entre elas.

Ficha de trabalho 1 (anexo 4)

A ficha 1 foi produzida para ser realizada individualmente no primeiro dia de aplicação da unidade de ensino. Trata-se de uma ficha de diagnóstico sobre o conhecimento dos alunos sobre funções nos seguintes domínios: comunicação/interpretação matemática; identificação de diferentes tipos de funções nas diferentes representações (gráfica, numérica, algébrica e verbal); identificação de diferentes tipos de funções (proporcionalidade direta, proporcionalidade inversa, afim e quadrática); propriedades de funções (domínio, contradomínio, conjunto de chegada, determinação de objetos e imagens). Os alunos resolveram a ficha sem consulta, apoiando-se nos conhecimentos adquiridos em anos letivos anteriores.

Ficha de trabalho 2 (anexo 5)

A ficha 2 foi elaborada para ser realizada na segunda aula de aplicação da unidade de ensino. Após revistos e apresentados vários conceitos e procedimentos, como a definição de função ou regras práticas para a identificação de funções nas várias representações, os alunos devem responder às questões da ficha. Trata-se de uma ficha que aborda os seguintes domínios: comunicação/interpretação matemática; identificação de diferentes tipos de funções nas diferentes representações (gráfica, numérica, algébrica e verbal); identificação de diferentes tipos de funções (de proporcionalidade direta, de proporcionalidade inversa, afim e quadrática); propriedades das funções (domínio, contradomínio, conjunto de chegada, determinação de objetos e imagens). A leitura e interpretação de gráficos tornam-se fundamentais na resolução das questões da ficha 2, uma vez que todas as questões da mesma contemplam funções representadas graficamente. A conversão entre a representação gráfica e representações diferentes é assim fundamental para a formulação das respostas pretendidas.

A ficha é composta por cinco questões, em que as duas últimas (questões 4 e 5) assumem carácter mais aberto. Ainda assim, a maioria das questões são contextualizadas onde diferentes representações de funções são apresentadas, com exceção da questão 1 que se trata de um exercício.

Ficha de trabalho 3 (anexo 6)

Na ficha 3 são abordadas diferentes propriedades das funções, a saber: domínio, contradomínio, determinação de objetos e imagens, determinação dos zeros e estudo do sinal e da monotonia. A ficha 3 é composta por duas grandes questões, subdividas em várias alíneas. A leitura e interpretação gráfica e a conversão entre diferentes representações é novamente fundamental para a sua resolução. Apesar de serem questões descontextualizadas, não se resumem a exercícios. O grau de dificuldade não é sempre o mesmo e são exigidas nalgumas questões conexões entre diferentes assuntos bem como uma interpretação adequada sobre o que é solicitado.

Ficha de trabalho 4 (anexo7)

Na ficha 4 são novamente estudadas as propriedades de funções: domínio, contradomínio, determinação de objetos e imagens, determinação de zeros, determinação de máximos e de mínimos (relativos e/ou absolutos), estudo da monotonia e do sinal e injetividade. À semelhança do que acontece com a ficha 3, encontram-se questões descontextualizadas com diferentes graus de dificuldade, podendo ser exercícios, explorações ou problemas. A última questão da ficha dá liberdade aos alunos para inventarem/criarem funções que obedeçam a determinadas características.

Ficha de trabalho 5 (anexo 8)

Procurou-se, com a ficha 5, possibilitar aos alunos o contacto com uma tarefa onde fosse necessário "interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos" (ME, 2001, p.4) e onde fosse possível desenvolver as seguintes capacidades: "… de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real" e "… de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (ME, 2001, p.3). Antes da implementação da unidade didática, todos os alunos já tinham contactado com a função afim (em anos letivos anteriores e, no 1.º período, aquando do estudo da reta). O trabalho com esta função, e com a ficha de trabalho 5, requer especificamente o seguinte: a capacidade de identificar e relacionar objeto e imagem, observar e interpretar representações gráficas, identificar expressões algébricas que definem uma função representada por uma reta, determinar a expressão algébrica de uma reta dados dois pontos da mesma. Acreditando que, com base nestes pré-requisitos e em conjunto com tarefas e metodologias criteriosamente escolhidas, é possível desenvolver aprendizagens significativas relacionadas com a função afim, deu-se início ao estudo da função afim com a ficha de trabalho, intitulada "Como comprar uma PlayStation Portátil?", adaptada das brochuras disponibilizadas pela APM (Saraiva, et al, 2010). Com a tarefa, pretende-se que os alunos, perante um contexto problemático, desenvolvam a capacidade de analisar e interpretar representações gráficas e verbais de funções bem como formulem conjeturas, exprimindo processos e ideias matemáticas, de formal oral e escrita, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios. Após a análise da representação gráfica, é fundamental que os alunos consigam ir contextualizando e dando significado a essa mesma representação. Assim, serão capazes de refletidamente irem respondendo às questões solicitadas. Trata-se de uma tarefa que permite a caracterização de objetos, imagens, domínio, contradomínio, zeros ou ainda de representações algébricas de funções a partir de uma situação particular e contextualizada de uma função real de variável natural. Para além disso, possibilita uma diversidade de resoluções, envolvendo conexões entre diferentes representações de funções.

Ficha de trabalho 6 (anexo 9)

Entender o processo relacionado com as transformações de funções é um objetivo transversal no estudo de funções durante todo o ensino secundário. Tratando-se de um ponto em que a conexão entre as funções e a geometria é evidente e onde a realização de pequenas investigações pode tomar lugar, "o estudo das transformações simples de funções deve ser feito tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador (ME, 2001, p.28). Assim, optou-se, para a realização da ficha de trabalho 6, pelo recurso auxiliar da calculadora gráfica para posteriormente se desenhar, com lápis e papel, gráficos de funções afins representadas algebricamente. Desta forma, possibilita-se que os alunos analisem "os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez) " (ME, 2001, p.28). Pressupõe-se que a conversão entre a representação algébrica e gráfica seja o ponto forte da ficha 6, cujo objetivo consiste, através de pequenas explorações, na realização do estudo da função afim: representação gráfica, domínio, contradomínio, zeros, sinal e variação, expressão analítica, relacionar o gráfico de $y=mx$ com os gráficos de $y=mx+b$ e relacionar o gráfico de y=x com os gráficos de $y=mx$, onde m e b são números reais.

Ficha de trabalho 7 (anexo 10)

Na ficha de trabalho 7 todas as questões abordam o estudo de funções definidas por ramos. Tratando-se as mesmas de uma novidade para os alunos, optou-se por partir de algo que já mereceu análise numa fase anterior e, assim, a questão inicial da ficha 7 já havia surgido na ficha de trabalho 2. O objetivo da questão 1 da ficha 7 é ajudar os alunos na construção do conceito de função definida por ramos. Desta forma, todas as representações possíveis de funções são abordadas: no enunciado tem-se a representação gráfica, na questão 1.1. a representação tabelar/numérica, na questão 1.2. a representação verbal e na questão 1.3. a representação algébrica. Acreditando que o confronto com as várias representações é um fator decisivo na promoção do desenvolvimento do conceito de função definida por ramos, o mesmo está presente em todas as questões da ficha de trabalho. Na questão 2 pretende-se que os alunos interpretem uma função representada graficamente e que a partir da sua interpretação escrevam a sua expressão analítica. Na questão 3 trata-se do inverso: conversão da representação analítica para gráfica. Já na última questão da ficha os alunos trabalham a conversão entre representação verbal e algébrica, bem como conversão entre representação verbal e/ou algébrica para representação gráfica.

A estrutura da ficha 7 privilegia a comunicação matemática de forma escrita e oral. De notar que, dada a natureza das funções estudadas pelos alunos até à data de implementação da ficha 7, todos os ramos das funções são semirretas ou segmentos de retas.

Ficha de trabalho 8 (anexo 11)

A ficha 8 foi elaborada para dar início ao estudo da função quadrática. Trata-se de uma função já apresentada aos alunos no ensino básico, no estudo de situações particulares. A ficha é dividida em duas questões adaptadas do manual escolar adotado e tem os seguintes objetivos (com grau de profundidade ainda reduzido): definir e identificar funções quadráticas; usar uma função quadrática como modelo matemático de situações da vida real; identificar o gráfico de uma função quadrática como sendo uma parábola; determinar as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática; determinar o contradomínio de uma função quadrática e; representar funções quadráticas manualmente e/ou com auxílio da calculadora.A ficha foi elaborada de forma a conduzir os alunos à obtenção das conclusões pretendidas, procurando que fossem eles próprios a construir o conhecimento que iria ser generalizado em aulas futuras. É apresentada uma situação contextualizada onde se pretende dar resposta a um problema.

Ficha de trabalho 9 (anexo 12)

A ficha 9, intitulada “De quem é a responsabilidade?”, é constituída por um problema também apresentado nas brochuras da APM (Saraiva, et al, 2010) e tem os seguintes objetivos: resolver problemas envolvendo a função quadrática; usar uma função quadrática como modelo matemático de situações da vida real; identificar o gráfico de uma função quadrática como sendo uma parábola; resolver inequações de 2.º grau; determinar as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática; determinar os zeros de uma função quadrática a partir da sua representação algébrica (incluindo a fórmula resolvente); determinar o contradomínio de uma função quadrática e; representar funções quadráticas manualmente e com auxílio da calculadora.

Partindo de uma representação algébrica, pretende-se que os alunos “desenvolvam a capacidade de enquadrar o modelo matemático referido na tarefa, no contexto em que este foi proposto, de forma a dar significado ao mesmo e responder às questões” (Saraiva, et al, 2010, p.45). Espera-se, assim, que os alunos, num contexto semirreal, tirem conclusões baseadas na observação e interpretação de representações gráficas e algébricas de uma função quadrática. Trata-se de uma ficha onde os alunos têm de estabelecer conexões entre as diferentes representações de funções (algébrica e gráfica) de forma a expressarem ideias matemáticas de forma oral e escrita.

Ficha de trabalho 10 (anexo 13)

Na ficha 10 são apresentadas algebricamente e na forma canónica quatro funções quadráticas. Na primeira questão os alunos têm de fazer o estudo de cada uma delas nos seguintes domínios: determinação dos zeros, esboço do gráfico, determinar as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função e indicar a equação do eixo de simetria da mesma. O estudo pretendido exige que os alunos apliquem os conhecimentos estudados nas aulas anteriores e que apresentem todas as justificações analíticas necessárias às conclusões tiradas. Na segunda questão pede-se que os alunos escrevam as expressões algébricas das quatro funções na forma $a(x-x_1)(x-x_2)$ e na forma $a(x-h)^2+k$, onde forma x_1,x_2,h e k representam números reais. Pretende-se com a segunda questão confrontar os alunos com diferentes representações de funções dentro da mesma representação (algébrica). Neste campo, ao contrário da alínea 1.1., onde é bem explicito o que é dado e pedido, a questão 1.2. apresenta um grau de dificuldade superior e, para alguns alunos, pode não ser bem claro o que é pedido, mediante o que é fornecido no enunciado. Desta forma, os alunos terão de realizar algumas explorações e/ou investigações para conseguirem responder corretamente à segunda alínea da ficha. Por fim, será esperado que os alunos consigam estabelecer relações entre as diferentes expressões analíticas da função quadrática e o conhecimento dos seus zeros e/ou das coordenadas do vértice da parábola que as representam graficamente.

Ficha de trabalho 11 (anexo 14)

A ficha 11 é composta por três questões divididas em várias alíneas. Sendo prevista a sua realização já na parte final da unidade de ensino, o conhecimento dos alunos sobre os três tipos de funções estudadas será, nessa fase, já mais sólido, pelo que se trata de uma ficha de trabalho que mescla várias funções e vários conceitos. Na primeira questão são apresentadas duas funções $h(t)$ e $v(t)$ que representam, respetivamente, a altura de uma bola lançada verticalmente (em metros) e a velocidade da mesma (em metros por segundo). É pedido que os alunos resolvam a primeira questão da ficha com auxílio da calculadora gráfica, nomeadamente que efetuem o seguinte: esbocem o gráfico das duas funções; determinem a altura máxima atingida pela bola, o instante em que isso acontece e a que velocidade seguia a bola nesse instante; indiquem o domínio e o contradomínio de cada função e; determinem a velocidade da bola no momento em que chega ao solo. Trata-se de uma questão em que a modelação matemática de uma situação real é evidente, bem como a conexão entre temas matemáticos e temas de outras ciências. O confronto com diferentes janelas de visualização da calculadora gráfica para a determinação dos valores pedidos é fundamental na resolução da questão 1, bem como o rigor a apresentar nos arredondamentos pedidos. O grau de dificuldade da questão é intermédio, a tender para o elevado. A correta interpretação do enunciado e do que é solicitado em cada alínea, o confronto entre os vários dados apresentados e a conexão dos mesmos com os conceitos matemáticos aprendidos são elementos que exigem algumas explorações por parte dos alunos.

Na questão 2 da ficha os alunos têm de converter uma representação gráfica de uma função em algébrica. São facilitadoras para a resolução desta questão as conclusões obtidas na ficha 10 (escrita da expressão analítica da função quadrática mediante o conhecimento das coordenadas do vértice e/ou dos zeros da função). Para além disso, a escrita de uma expressão analítica de uma função afim representada graficamente é novamente recordada. Já na questão 3 os alunos têm de resolver uma inequação analítica e graficamente, com o auxílio da calculadora gráfica.

Ficha de trabalho 12 (anexo 15)

A primeira questão da ficha 12 foi adaptada da brochura de apoio ao programa de matemática publicada pelo Departamento do Ensino Secundário (DES, 1997). Trata-se de uma questão com conexões geométricas, onde os alunos deverão ser capazes de: escrever a expressão analítica de uma função expressa verbalmente, resolver inequações de 2.º grau, representar funções graficamente e analisar esse gráfico em termos de monotonia, extremos e determinação de objetos e/ou imagens. Na segunda questão da ficha encontra-se uma função definida por ramos onde o primeiro ramo é uma semirreta e o segundo é parte de uma parábola. A apresentação contextualizada da situação exige uma interpretação do problema para a resolução das questões. Para além do desenvolvimento da comunicação matemática e interpretação dos enunciados, a questão 2 tem ainda os seguintes objetivos: determinar zeros de uma função definida por ramos, determinar objetos e/ou imagens de uma função definida por ramos e desenhar o gráfico de uma função definida por ramos.

Testes de avaliação (anexos 14 e 15)

Os momentos de avaliação globais formalizam-se aquando da realização dos dois testes de avaliação do 2.º período de aulas. Será, assim, possível avaliar as aprendizagens realizadas ao longo da unidade de ensino, bem como detetar as dificuldades com intuito de futuramente as minimizar, nomeadamente com o esclarecimento de dúvidas e com a correção dos testes de avaliação em aula. Desta forma, é possível fazer com que "a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem e permita que o estudante seja um elemento ativo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem" (ME, 2001, p.13).

Os dois testes de avaliação têm uma estrutura semelhante à do exame final de 12.º ano, onde uma primeira parte é composta por questões de escolha múltipla e uma segunda por questões de desenvolvimento. Dado que os testes têm de ser globais (opção metodológica de escola), optou-se por colocar temas do capítulo de Geometria (tema I) apenas na primeira parte, sendo que as questões de desenvolvimento da segunda parte enquadram-se todos no capítulo das funções.

4. Metodologia

4.1. Opções metodológicas

O trabalho de projeto desenvolvido tem como base um estudo exploratório de natureza qualitativa. Pretendendo responder às questões de estudo formuladas, optou-se por uma abordagem qualitativa, onde a recolha de dados é realizada no ambiente natural (Denzin & Lincoln, 1994), ou seja, a sala de aula da turma, e onde a apresentação dos mesmos é realizada de uma forma descritiva "de modo a que o investigador conduza o leitor a uma compreensão do significado das experiências efetuadas no estudo" (Vale, 2004, p.1). No estudo apresentado não existe a pretensão de generalização de resultados, mas sim a da compreensão, descrição e extração de conclusões para um fenómeno composto por várias situações de sala de aula que decorrem no âmbito da unidade de ensino descrita anteriormente.

4.2. Os participantes

Para a realização do estudo foram selecionados três dos onze grupos de trabalho da turma, designados por grupos A, B e C e compostos, cada um deles, por dois elementos mistos. Designaremos em seguida por A1 e A2, B1 e B2 e C1 e C2, a aluna e o aluno dos grupos A, B e C, respetivamente. Procurando que os seis elementos constituíssem bons informantes para o estudo, os critérios de seleção dos grupos foram os seguintes: a heterogeneidade académica (grupos A e C apresentam um bom desempenho escolar e grupo B intermédio/baixo), a boa assiduidade dos elementos dos grupos nas aulas e a heterogeneidade de sexo dos dois elementos constituintes do grupo.

Outros alunos constituintes da turma poderão também ser mencionados nesta análise, nomeadamente nos excertos das discussões gerais das fichas de trabalho. No entanto, constituem apenas um meio para evidenciar determinada situação que possa envolver algum dos alunos pertencentes aos grupos A, B ou C ou até algum conceito que se considere importante para analisar. Esses outros alunos serão nomeados com letras maiúsculas diferentes de A, B e C. Em seguida, apresento as características dos grupos selecionados para o estudo. Esta informação foi obtida nos questionários aplicados por mim no início do ano letivo (anexo 18), dos relatórios da diretora de turma e das pautas finais da turma do 1.º período.

Grupo A

A aluna A1 (16 anos) é uma aluna com muito bom desempenho, muito empenhada, aplicada mas bastante tímida e obteve classificação de 20 valores na disciplina de Matemática no final do 1.º período. As suas disciplinas preferidas são Matemática e Português. Considerando-se uma aluna muito boa a Matemática, reconhece que se trata de uma disciplina que requer muita dedicação e empenho. A aluna refere que gostaria de ser professora pois "gosto de ensinar ou outros, explicar matérias". O aluno A2 (16 anos) é um aluno interessado e aplicado embora, por vezes, distraído e obteve classificação de 16 valores, na disciplina, no final do 1.º período. Considera-se um bom aluno a Matemática, área que considera ser "importante, sobretudo para quem segue a área da Economia". Trata-se da disciplina de que mais gosta. Embora ainda não saiba o que gostaria de seguir como profissão, ambiciona tirar uma licenciatura no âmbito da Economia.

Grupo B

A aluna B1 (15 anos) tem várias dificuldades na disciplina de Matemática ao nível de pré-requisitos, é um pouco conversadora e obteve classificação de 10 valores nesta disciplina no final do 1.º período. Considera-se uma aluna média a Matemática, pelas notas medianas que obteve no ensino básico, tratando-se da disciplina que lhe requer mais esforço. No entanto, refere que gosta da mesma porque "é uma ciência muito importante e quando se percebe é interessante". A aluna ambiciona ser corretora de bolsa. O aluno B2 (16 anos) é um aluno interessado e aplicado, embora demonstre também dificuldades na disciplina, tendo obtido classificação de 11 valores no final do 1.º período. Considera-se um aluno médio a Matemática, disciplina de que gosta, mas que não é a sua preferida, pois considera que "põe muitos obstáculos e barreiras que temos de descobrir para resolver problemas”. Reconhece que tem dificuldades e que “sempre foi e sempre será a disciplina mais difícil”. O aluno ainda não tem ideia da profissão por que deseja enveredar.

Grupo C

A aluna C1 (15 anos) é interessada e participativa, um pouco conversadora e distraída, tendo obtido classificação de 14 valores na disciplina no final do 1.º período. Considera-se uma aluna média a Matemática, gosta da disciplina, mas refere que, apesar de ter sido uma das suas disciplinas preferidas no ensino básico, “é uma disciplina que puxa muito por nós, mas que é preciso muito empenho e dedicação”. Considera que poderia conseguir “muito mais do que aquilo que demonstro conseguir pois não me aplico o suficiente, nem estou atenta o suficiente”. Ainda não sabe o que quer ser no futuro. O aluno C2 (15 anos) é um aluno extremamente interessado, motivado e trabalhador, tendo obtido a classificação de 19 valores, na disciplina, no final do 1.º período. As suas disciplinas preferidas são Matemática e Economia e considera-se um aluno muito bom a Matemática, pois “tenho tido esses resultados noutros anos”. Ambiciona ser economista.

4.3. Procedimentos e instrumentos de recolha de dados

A observação participante constituiu um método de recolha de dados presente ao longo de toda a unidade de ensino. Assumindo o duplo papel de professora e investigadora, foi-me possível privilegiar o contacto direto com o objeto de observação, vendo, ouvindo e experienciando a realidade tal como os participantes o fazem, com o objetivo de a analisar em função do objetivo do estudo (Marshal & Rossman, 2006). O facto de o observador ser o próprio professor possibilitará um minimizar das eventuais alterações comportamentais comparativamente ao caso em que o observador é externo. Por outro lado, também o facto de o investigador ser o próprio professor permitirá criar condições de autoanálise, onde o pensar sobre a ação toma lugar, nomeadamente o pensar sobre a prática profissional enquanto docente (Bogdan & Biklen, 1994). Acreditando que a análise sobre a prática docente poderá constituir um contributo importante para as respostas às questões deste estudo, considero assim uma mais-valia a dualidade existente na professora/investigadora. Reconheço, contudo, que podem existir alguns fatores limitadores inerentes ao duplo papel desenvolvido, nomeadamente relacionados com a observação direta das aulas. Esta, quando desenvolvida por um investigador pode ficar mais completa em termos de abrangência do que quando desenvolvida por um investigador que é simultaneamente o professor. Por outro lado, reconheço também o risco existente de se poder perder uma perspetiva distanciada, necessária ao questionamento de conceitos e práticas, consequência da proximidade/familiaridade existente entre mim e alunos.

Por forma a guardar de forma fiável todos os episódios de sala de aula, foram filmadas e gravadas em vídeo e áudio todas as aulas de implementação da unidade de ensino (com exceção das aulas em que foram realizados os testes de avaliação). As autorizações da direção da escola e dos encarregados de educação legitimaram este procedimento. A camara de filmar foi instalada por mim no fundo da sala de aula e um gravador áudio colocado na minha secretária, junto ao quadro. Os aparelhos eletrónicos foram instalados sempre nos intervalos que antecediam o início das aulas de matemática por forma a não alterar o normal funcionamento das mesmas. Rapidamente a turma se foi adaptando aos aparelhos, sem que existissem alterações comportamentais marcantes. No fim das aulas fiz alguns registos escritos, nomeadamente sobre comentários pertinentes e/ou raciocínios dos alunos.

A fonte de dados é, no entanto, constituída principalmente por documentos produzidos pelos alunos em sala de aula: questionários, fichas de trabalho, fichas de avaliação e resoluções de questões do manual. Os testes de avaliação são compostos por duas partes, uma primeira de questões de escolha múltipla e uma segunda composta por questões de desenvolvimento. Apenas a segunda parte dos testes de avaliação constitui fonte de dados para o estudo dado ser nessa que figuram as questões sobre funções. Na primeira parte apenas surgem as questões relacionadas com o capítulo lecionado no 1.º período, geometria. Foram tiradas fotocópias dos testes de avaliação dos alunos, mas não foi necessário tirar fotocópias das resoluções das fichas de trabalho dos alunos, uma vez que foram sempre recolhidas as fichas de respostas antes da discussão geral, garantindo também que as respostas não eram alteradas após as suas correções/discussões.

Estes dados recolhidos das resoluções escritas dos alunos foram utilmente complementados pelas gravações de áudio e vídeo

A aplicação do questionário (anexo 18) no início do ano letivo possibilitou também um conhecimento mais abrangente sobre todos os elementos da turma, de uma forma rápida e sistemática. As questões do questionário incidem sobre o passado escolar dos alunos em termos de retenções, sobre disciplinas preferidas, passatempos preferidos e sobre as conceções dos alunos relativamente à matemática Por forma a minimizar a taxa de não resposta e a dificuldade de interpretação das mesmas, procurou-se na maioria das questões pedir aos alunos as justificações das respostas. As fichas de trabalho, de avaliação e as questões do manual que foram realizadas pelos alunos constituem uma base de dados fulcral. A sua elaboração/seleção é parte integrante deste trabalho de projeto e as questões que nelas constam tiveram como propósito principal a promoção do desenvolvimento do conceito de função nos alunos, objetivo central da unidade de ensino.

A análise documental também contemplou a pauta final de 1.º período da turma (2014/2015), os relatórios elaborados pela diretora de turma (no que concerne à caracterização inicial da turma), os processos biográficos de alguns alunos e os documentos orientadores da escola, entre os quais o regulamento interno, o projeto educativo, o projeto curricular e o plano anual de atividades.

4.4. A análise de dados

O processo de recolha e análise de dados é dos mais importantes aquando da concretização do trabalho de projeto pois é com ele que se torna possível, mediante a compreensão de todo o conjunto de dados disponível, dar resposta às questões de estudo formuladas. Procurou-se realizar uma análise de dados de forma indutiva, com vista a retratar algo que sucede numa realidade particular, não se pretendendo tirar conclusões que sejam generalizáveis a uma população mais ampla.

A análise de dados pode dividir-se em três grandes momentos: descrição, análise e interpretação (Wolcott, 1994). Numa primeira fase procurei descrever processos relevantes para o estudo, para posteriormente proceder à sua análise, onde foram organizados os dados e salientados os aspetos essenciais a destacar. Por fim, por forma a serem retiradas ilações/conclusões a partir e sobre os dados obtidos procedeu-se à interpretação dos mesmos. Os documentos produzidos pelos grupos de alunos foram analisados na sua totalidade, dado maior ênfase a determinadas respostas/questões consideradas centrais, de acordo com as questões orientadoras do estudo. Constituindo as gravações áudio e vídeo uma vasta fonte de dados, foram transcritas apenas segmentos das mesmas consideradas mais relevantes para o estudo, dado se ter privilegiado a análise documental.

Tendo-se optado pela análise pormenorizada do trabalho realizado por três grupos de trabalho, surgiu a necessidade de categorizar os dados por forma a criar uma estrutura capaz de transmitir os resultados (Stake, 2007). Assim, foram inicialmente criadas duas grandes categorias de análise: *Conceito de função* e *Aprendizagens desenvolvidas*. A primeira foi subdividida em duas subcategorias – F*ase inicial* e *Fase posterior* – e a segunda foi subdividida em três subcategorias – *Função afim*, F*unção definida por ramos* e *Função quadrática*, de acordo com os tópicos principais da unidade de ensino.

A primeira grande categoria pertente dar a conhecer, numa primeira fase (*Fase inicial*) a situação em que se encontravam os alunos relativamente aos seus conhecimentos sobre as funções. Nesta fase, a análise baseou-se apenas nas respostas dos alunos à ficha de trabalho 1, resolvida individualmente, por se tratar de uma ficha de diagnóstico. Desta forma, trata-se de uma análise de dados apresentada a nível individual (4.1.1). Por forma a analisar a evolução do conceito de função por parte dos alunos surge a segunda subcategoria: *Fase posterior*. A segunda grande categoria (*Aprendizagens desenvolvidas*) será apresentada em três vertentes, uma vez que se pretende analisar as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos nos três tipos de funções estudadas: função afim, função definida por ramos e função quadrática. Nos vários domínios apontados foi dado especial relevo aos seguintes aspetos: o reconhecimento de funções nas suas várias representações e o estudo das suas propriedades.

Com o objetivo de simplificar a leitura e a organização da escrita, optou-se por utilizar um código para as legendas das figuras respeitantes às resoluções dos alunos das tarefas propostas. Assim, por exemplo, “Q4.1., F1, A2”, exemplificará o que respondeu o aluno A2, na questão 4.1, da ficha de trabalho 1; já “Q1, F2, Grupo A” exemplificará o que respondeu o grupo A, na questão 1 da ficha de trabalho 2.

5. Análise de dados

5.1. Conceito de função

5.1.1. Fase inicial

Reconhecimento de uma correspondência como função

Numa fase inicial, e baseados nos conhecimentos adquiridos em anos letivos anteriores, os alunos não apresentaram muita dificuldade em identificar se uma determinada correspondência pode ou não representar uma função. Verificou-se que, perante as representações gráfica e numérica facilmente os alunos eliminam as correspondências que não são funções por se tratar de "correspondências que têm valores diferentes de y para um valor de x" (A1, Q4.1., F1), restando as correspondências que são funções pois "nestas correspondências só existem uma hipótese de y para cada hipótese de x" (C2, Q4.1., F1) ou porque "são as únicas em que o mesmo objeto tem apenas uma imagem" (A1, Q4.1, F1). Alguns alunos justificaram que determinada correspondência representa uma função ao identificarem diretamente que se trata de uma função afim, de proporcionalidade direta, de proporcionalidade inversa ou ainda de uma função quadrática (Figura 1 e Figura 2).

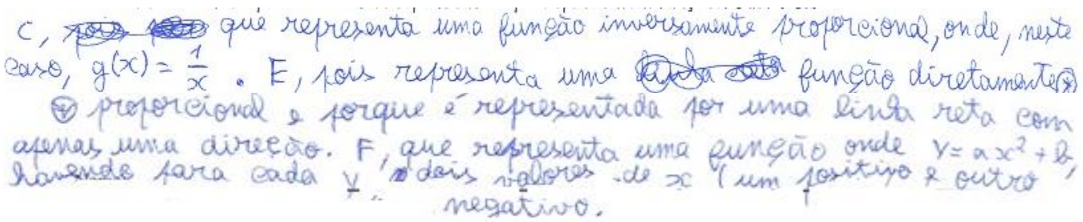

C, que representa uma função inversamente proporcional, onde, neste caso, $g(x) = \frac{1}{x}$. E, pois representa uma função diretamente proporcional e porque é representada por uma linha reta com apenas uma direção. F, que representa uma função onde $y = ax^2 + b$ havendo para cada y dois valores de x (um positivo e outro negativo.

Figura 1 – Q4.1., F1, A2

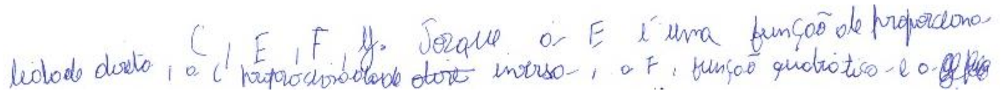

C, E, F, G. Porque o E é uma função de proporcionalidade direta, o C proporcionalidade inversa, o F função quadrática e o

Figura 2 – Q4.1., F1, B2

Verificou-se dificuldade acrescida em identificar se um gráfico representa uma função quando esta é definida por ramos (Q4, gráfico A, F1). Trata-se de uma situação muito pouco trabalhada a nível do ensino básico e, talvez por isso, só um aluno (C2) foi capaz de reconhecer o gráfico A da questão 4 da ficha 1 como uma representação gráfica de uma função.

Na questão 3 da ficha 1 são apresentados vários gráficos em que “d representa a distância relativa a um ponto de partida e t o tempo”. Quando é pedido que os alunos selecionem os gráficos que podem representar viagens (3.1.) a dificuldade encontrada existiu na indefinição sobre se se tratava de uma viagem de ida e volta ou só de ida. Assim, em função dessa ambivalência os alunos responderam selecionando B e F (Figura 3) ou A e E. Só um aluno identifica as quatro situações como possíveis de representar viagens “porque o tempo tem que aumentar sempre, não pode ficar parado” (B2, Q3.1., F1, Figura 4). No entanto, quando questionados sobre qual dos gráficos podem representar funções só metade (A1, B2, C2) apresenta os quatro esperados. De notar que esta metade mostra um elemento de cada grupo selecionado.

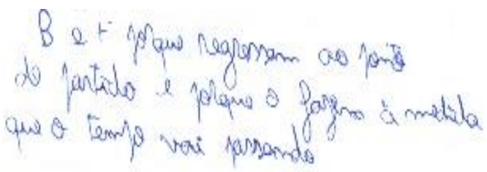


Figura 3 – Q3.1., F1, C3

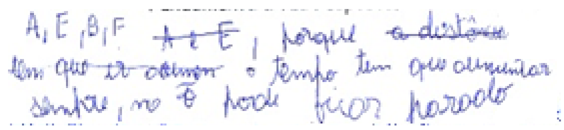


Figura 4 – Q3.1., F1, B2

A situação referida começa por ser apresentada verbalmente e é complementada de forma gráfica. Assim, o facto de se ter acrescentado informação verbal às representações gráficas apresentadas pode ter influenciado negativamente as respostas dos alunos. Tal situação pode dever-se à necessidade de se conjugar simultaneamente duas formas de representar funções: gráfica e verbal.

Os diferentes tipos de funções e suas propriedades

Numa fase inicial verificou-se que os alunos se sentiam mais familiarizados com os seguintes tipos de funções: função de proporcionalidade direta, função afim e função de proporcionalidade inversa. A diferença entre as duas primeiras é bem explicada pelo aluno A2 na justificação da questão 1.4. da ficha 1 (Figura 5), onde, inicialmente ao pensar que se trata de uma função de proporcionalidade direta pelo facto de ambas as variáveis aumentarem simultaneamente, reconhece que afinal se trata de uma função afim pelo facto de a imagem de zero ser diferente de zero (Figura 5). De notar que o aluno apresenta a sua primeira resolução entre parêntesis pois foi feito o pedido de não ser apagado qualquer raciocínio, mesmo que errado, por forma a ser possível analisar toda a construção conducente à resposta final.

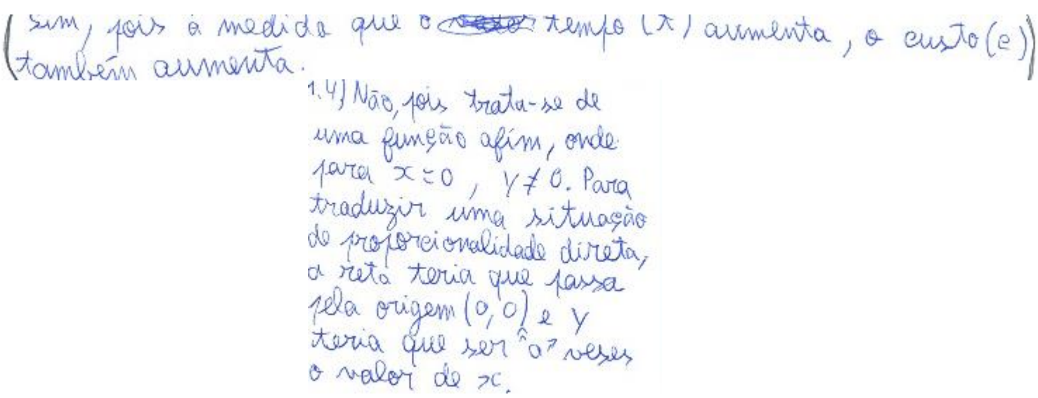

(sim, pois à medida que o tempo (x) aumenta, o custo (c) também aumenta.)
1.4) Não, pois trata-se de uma função afim, onde para $x=0$, $y \neq 0$. Para traduzir uma situação de proporcionalidade direta, a reta teria que passa pela origem (0,0) e y teria que ser "a" vezes o valor de x.

Figura 5 – Q1.4., F1, A2

Dois alunos (B2 e C1) não chegam ao esclarecimento do A2, ficando convencidos de que estão perante uma função de proporcionalidade direta, ao ignorarem o facto de existir um preço de deslocação, acrescido aos 15 euros que são cobrados por cada hora de trabalho. Nota-se que para estes dois alunos existem dificuldades na representação gráfica e algébrica para este tipo de função, quando esta é inicialmente apresentada na forma verbal. Quando confrontados com situações de proporcionalidade inversa a conversão da representação verbal e/ou gráfica para algébrica mantém-se.

Verificou-se que aquando do trabalho com os três tipos de função mencionados, a maioria dos alunos não apresenta muita dificuldade nas conversões entre diferentes representações. No entanto, mostram dificuldade quando questionados sobre as propriedades dessas mesmas funções, nomeadamente o domínio, o contradomínio, calcular/identificar objetos, imagens e/ou zeros. Só uma aluna (A1) demonstrou conhecimento inicial sobre todos esses conceitos (Q5, F1). Tratando-se de uma questão transversal, o estudo das propriedades de qualquer tipo de função é então considerada como uma dificuldade inicial nos três grupos.

Dificuldade geral foi também assinalada no trabalho com a função quadrática. A maioria dos alunos reconhece uma parábola como possível representação gráfica de uma função quadrática. No entanto, quando é solicitada a conversão da representação algébrica para gráfica só um aluno consegue realizá-la com sucesso (Figura 6). Os restantes alunos associam a representação gráfica de uma função quadrática a uma reta ou semirreta (Figura 7) ou não conseguem sequer resolver a questão.

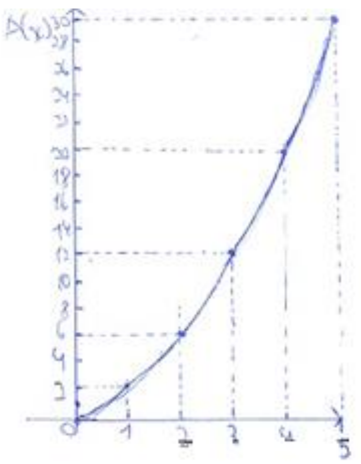


Figura 6 – Q6.3., F1, C2

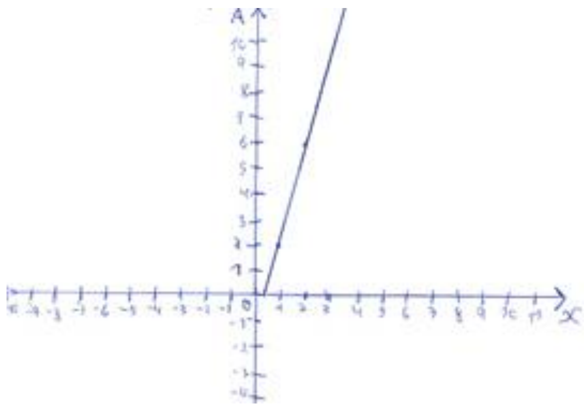


Figura 7 – Q6.3., F1, A2

Aquando do trabalho com a função quadrática, as mesmas dificuldades na conversão entre a representação gráfica e a algébrica também foram identificadas, nomeadamente na questão 4. da ficha 1, onde facilmente as justificações para as questões recorrem às expressões analíticas das funções afins/proporcionalidade direta ou inversa ($y=kx$, $y=kx+b$ ou $y=k/x$), mas que ficam por escrever quando se trata da função quadrática. Aqui só um aluno (A2) consegue concretizar que se trata de uma função cuja expressão analítica é $y=ax^2 + b$ (Figura1).

5.1.2. Fase posterior

Reconhecimento de uma correspondência como função

Numa segunda fase, foi novamente pedido que os alunos distinguissem situações passíveis ou não de serem funções. O critério de eliminação mais usado na fase inicial manteve-se: a cada objeto corresponde mais do que uma imagem (Figura 8). Mas, numa fase posterior, para além desse, e perante a representação gráfica, os alunos recorreram à “prova” geométrica do traçado de retas verticais intersetar o gráfico mais do que uma vez (Figura 9), ou ainda, perante a representação analítica, os alunos recorreram à resolução de equações para confirmar que um objeto tem mais do que uma imagem (Figura 10). Apesar de o grupo A assumir erradamente que a raíz quadrada da soma é igual à soma das raízes quadradas, acaba por reconhecer a dualidades das imagens pelo “+-“ identificado no sublinado (Figura 10). Nesta última situação, só o grupo B considerou a condição x^2-$2x$+y^2=8 capaz de representar uma função. Para além disso, também o mesmo grupo continuou a apresentar dificuldades na identificação de funções quando se tratam de funções definidas por ramos. Apesar de identificarem corretamente a alínea H (Q1, F2) como não sendo função (Figura 9), não identificam a alínea L como sendo função (Figura 11). A justifucação apresentada para a alínea (L) não representar uma função tem a ver com a falha de interpretação relacionada com o código das “bolinhas abertas e fechadas”, pois o grupo refere que a reta vertical imaginária interseta o gráfico em mais do que um ponto.


Não podem representar funções as alíneas B, D, G e H, pois a um objeto corresponde mais do que apenas uma imagem.

Figura 8 – Q1., F2, Grupo A

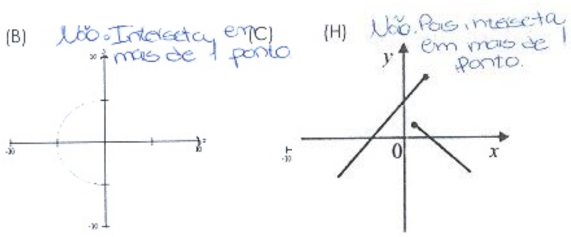


Figura 9 – Q1., F2, Grupo B

Figura 10 – Q1.(G), F2, Grupo A

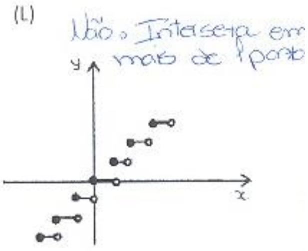


Figura 11 – Q1.(L), F2, Grupo B

Verifica-se, assim, que perante situações menos familiares, nomeadamente funções definidas por ramos ou expressões algébricas desconhecidas, os alunos têm mais dificuldade em identificar funções. No entanto, quando a função definida por ramos é apresentada graficamente e perante um contexto (representação verbal) a dificuldade diminui, verificando-se aqui uma evolução relativamente ao evidenciado na ficha 1. Na questão 3. da ficha 2 os três grupos não tiveram quaisquer dúvidas de que o gráfico representava uma função. O grupo A continuou a usar o argumento de que a cada objeto corresponde só uma imagem (Figura 12), o grupo B usa a mesma justificação de forma contextualizada (Figura13) e o grupo C faz uma junção das duas anteriores (Figura 14).

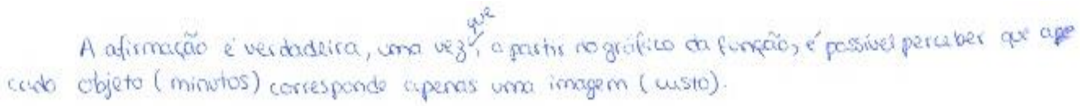


Figura 12 – Q3.3.2., F2, Grupo A

Figura 13 – Q3.3.2., F2, Grupo B

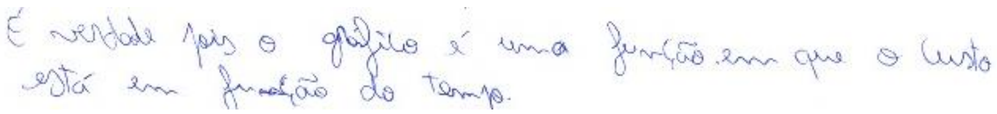


Figura 14 – Q3.3.2., F2, Grupo C

Os diferentes tipos de funções e suas propriedades

O trabalho com as funções definidas por ramos e com as funções afins gera dificuldades apenas no grupo B. Relativamente à função afim, este grupo evidencia dificuldade na conversão da representação gráfica para algébrica. Como se pode verificar na questão 3.3. da ficha 2 os alunos não conseguem responder corretamente à questão uma vez que não são capazes definir a expressão analítica pretendida (Figura 15). Esta é inicialmente representada graficamente pelo último ramo de uma função definida por ramos, tratando-se de uma semirreta pertencente a uma reta de expressão analítica da forma $y=ax+b$ e não $y=ax$.

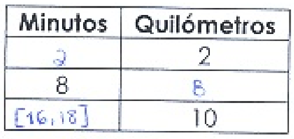
Figura 15 – Q3.3., F2, Grupo B

No entanto, na questão 5. da ficha 2, onde se trabalha também com uma função definida por ramos, não se verificam dificuldades quando se pede que os alunos identifiquem qual o gráfico que representa a situação descrita. A conversão da representação verbal para gráfica não gera dificuldades em nenhum grupo e todos identificam o gráfico corretamente. O grupo B refere inclusivamente que a escolha da alínea A se justifica "… pois a distância na partida é inferior a todos os outros pontos onde ele passa **[o ponto P]**, depois há um aumento da distância mas não proporcional."

O estudo das propriedades das funções envolve o domínio de variados conceitos e procedimentos, entre os quais se destacam: identificar/determinar o conjunto de partida, o conjunto de chegada, o domínio, o contradomínio, a variável independente, a variável dependente, os objetos, as imagens, os zeros, os extremos absolutos e/ou relativos; estudar a monotonia e o sinal de uma função; construir a tabela de variação e o quadro de sinal; estudar a injetividade; estudar a paridade; estudar a continuidade.

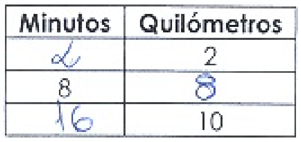
Na identificação/determinação de objetos com determinadas imagens ou vice-versa os grupos apresentam dificuldade apenas em casos particulares. Na ficha 2, apenas o grupo A consegue identificar a infinidade de objetos que tem determinada imagem (Figura 16), tendo os outros dois grupos identificado apenas um objeto (Figura 17).

Verifica-se que na ficha 3 tal dificuldade desaparece quando, por exemplo na questão 2.b_6), é pedido que os alunos identifiquem quais são os objetos que têm imagem 3 e todos os grupos respondem corretamente (Figura 18).



Minutos	Quilómetros
2	2
8	8
[16, 18]	10

Figura 16 – Q2.2., F2, grupo A



Minutos	Quilómetros
2	2
8	8
16	10

Figura 17 – Q2.2., F2, grupo B

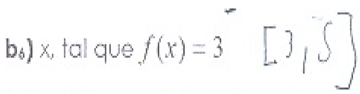


Figura 18 – Q2.b_6), F3, grupo B

Aquando da discussão geral da ficha 2, verifica-se que no grupo turma existem ainda alunos que mantém dificuldade em verificar que podem existir infinitos objetos com a mesma imagem. Na análise da questão 2.b_6), onde todos os números de 3 a 5 (inclusive) têm imagem 3, verificou-se o seguinte diálogo quando o aluno R se encontrava no quadro:

Professora: Quais são os objetos que têm imagem 3? É o que está ali pedido em "português", não é?

Aluno R: 3 e 5.

Professora: Só esses dois? São só esses dois?

Aluno B2: 3, 4 e 5.

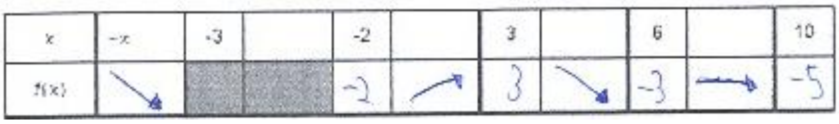
Professora: Agora diz B2… são só estes 3, B2?

Aluno B2: Tem de ser o intervalo de 3 a 5!

Aluno R: Não! É de 3 a 5! De 3 a 5.

O grupo B teve dificuldades iniciais na determinação de contradomínios e na determinação de objetos com determinadas imagens. No entanto, teve um papel importante na discussão geral descrita, capaz de conduzir ao esclarecimento de dúvidas de outros elementos da turma.

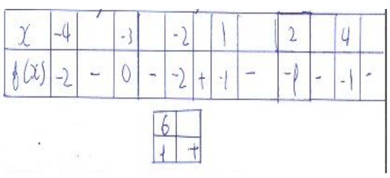
Verificou-se também que a dificuldade inicial na leitura de objetos no gráfico foi desaparecendo e o “código das bolinhas abertas e fechadas” desmistificado com o decorrer da unidade de ensino. Na ficha 4, por exemplo, o preenchimento correto do quadro de variação da função evidencia isso mesmo.



x	-∞	-3		-2		3		6		10
f(x)	↘			-2	↗	3	↘	-3	→	-5

Figura 19 – Q1.8., F4, grupo C

No estudo do domínio e do contradomínio de uma função verificaram-se mais contrariedades iniciais, bem como maior dificuldade no desaparecimento das mesmas. O grupo B foi o que mais dificuldade apresentou nesta área. A primeira dificuldade do grupo foi manifestada quando se pretendia identificar o domínio e determinar o contradomínio duma função representada graficamente. A leitura do gráfico e a elaboração do quadro de variação revelam que o grupo não identificou corretamente o domínio da função (Figura 20). Quando, na questão 2. da ficha 3 é apresentado um quadro de variação da função já não se verificam dificuldades na identificação do domínio, mantendo-se ainda dificuldade na determinação no contradomínio (Figura 21). Ainda na ficha 4, o grupo B continua a não demonstrar dificuldades na identificação do domínio, mas o contradomínio continua a não ser escrito corretamente (Figura 22). As dificuldades apresentadas pelo grupo B permaneceram nas restantes questões da ficha 4 relacionadas com o contradomínio.



x	-4		-3		-2		1		2		4	
f(x)	-2	-	0	-	-2	+	-1	-	-1	-	-1	-

6	
1	+

Figura 20 – Q1.a), F3, grupo B

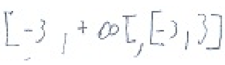
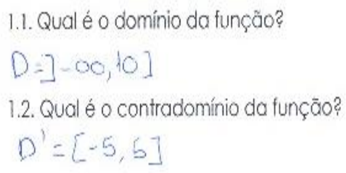


Figura 21 – Q2.b$_1$), F3, grupo B


1.1. Qual é o domínio da função?

$D =]-\infty, 10]$

1.2. Qual é o contradomínio da função?

$D' = [-5, 6]$

Figura 22 – Q1., F4, grupo B

Os grupos A e C não tiveram dificuldades na identificação do domínio nem na determinação do contradomínio de uma função em nenhuma das fichas de trabalho. Relativamente ao grupo B as dificuldades iniciais detetadas foram sendo ultrapassadas com o decorrer da unidade de ensino, como se pode verificar, por exemplo na ficha 7, bem como no teste de avaliação. Considero que para esse facto, para além da natureza das tarefas, foram cruciais as discussões gerais de todas as fichas de trabalho. Verifiquemos, por exemplo, que aquando da discussão geral das questões 1.1. e 1.2. da ficha 3, onde a identificação/determinação dos domínios/contradomínios é mais complexa, o aluno M dirige-se ao quadro, colocando erradamente os intervalos $]-\infty, 10]$ e $]5, +\infty]$ para representar o domínio e contradomínio, respetivamente:

> **Professora:** (…) Ao colocar $]-\infty, 10]$, estamos a dizer que conseguimos calcular as imagens de todos os pontos que estão no eixo do x que se encontram até aqui **[apontando para o ponto de abcissa 10]**, ou seja daqui para a esquerda, é isso?
>
> **Aluno M:** Sim.
>
> **Professora:** M., vamos verificar melhor? Por exemplo, qual é a imagem de -7?
>
> **Aluno M:** Ah, pois é… por causa disto **[aponta para os valores do eixo do x que se encontram entre -3 e -2]**
>
> **Professora:** Pois é! Portanto, a imagem de -7 seria 4, a imagem de -9 seria 5, mas qual era a imagem de… -3?
>
> **Aluno M:** Não há!
>
> **Professora:** Não há! Apesar da bola estar aberta, vocês têm que ter cuidado e pensar… será que vem cá para baixo, lá para cima?... Mas não há! Portanto, o que é que acontece? Mas a imagem de -2 já existe, não existe?

O aluno M procede à alteração do intervalo, apagando o extremo direito do mesmo, mas sente dificuldade na escrita da união dos intervalos pretendida, embora tenha noção da necessidade da mesma:

Aluno M: E agora como é que eu faço a separação? **[pergunta, depois de escrever** $]-\infty,-3]$**]**

Professora: O domínio é só até aí?

Aluno B2: Agora é união! U…U…

Professora: $]-\infty,-3]$, ok…

Aluno X: Espera, ele consegue!!!

Professora: União com….

(…)

O aluno M escreve o símbolo de união, seguido do segundo intervalo, respondendo agora corretamente à questão. As dificuldades apresentadas pelo aluno M são exatamente as mesmas sentidas pelo grupo B na resolução da ficha (Figura 22). No entanto, durante a discussão geral verificou-se que os elementos do grupo B participaram na construção do conhecimento, tendo ultrapassado as dificuldades.

A discussão geral da ficha 4 prosseguiu e a correção da escrita inicial do intervalo representante do contradomínio foi de forma semelhante efetuada pelo aluno M. Aqui a dificuldade encontrada prendeu-se com o fato de existirem dois pontos isolados pertencentes ao contradomínio: -5 e -3. A necessidade de se usar chavetas na escrita do contradomínio da função criou a oportunidade para distinguir a escrita que envolve as chavetas da escrita que envolve os parêntesis retos, tão fundamental nesta fase do estudo. De notar que antes da notação em causa ser explicada era de esperar que os alunos tivessem alguma dificuldade na questão 1.2. No entanto, os grupos A e C, embora não tendo apresentado o rigor na escrita formal, raciocinaram corretamente, tendo demonstrando um esforço inventivo próximo da escrita correta (Figura23 e 24).

Figura 23 – Q1.2., F4, grupo A

Figura 24 – Q1.2., F4, grupo B

Pode considerar-se o trabalho com as diferentes representações de funções e o estudo das suas propriedades como sendo movível, no sentido em que se preveem avanços e recuos consoante as situações apresentadas. No entanto, apresentam-se de seguida dois quadros que resumem as dificuldades detetadas pelos vários grupos após a lecionação de duas semanas de aulas do trabalho de projeto.

GRUPOS		**A**	**B**	**C**
Função afim	Representação Algébrica		x	
	Representação Gráfica			
Função definida por ramos	Representação algébrica		x	
	Representação Gráfica			
Função Quadrática	Representação Algébrica	x	x	x
	Representação Gráfica	x	x	

Quadro 3 – Dificuldades nas representações de funções após duas semanas

GRUPOS		**A**	**B**	**C**
Domínio	F. afim			
	F. ramos		x	
	F. quadrática			
Contradomínio	F. afim		x	
	F. ramos		x	
	F. quadrática			
Objetos e imagens	F. afim		x	x
	F. ramos	x	x	x
	F. quadrática	x		x

Quadro 4 – Dificuldades no estudo de algumas propriedades de funções após duas semanas

O quadro 3 identifica as dificuldades a nível do trabalho com as representações de funções. Neste campo, as representações verbais e numéricas não ofereceram dificuldades. Estas foram detetadas com maior incidência nas representações gráfica e algébrica para os três tipos de funções (afim, definida por ramos e quadrática). O quadro 4 identifica as dificuldades no estudo de algumas propriedades das mesmas funções, nomeadamente na identificação/determinação de domínios/contradomínios, objetos e imagens. De referir que as dificuldades relativas à função quadrática são as que foram detetadas na ficha 1.

5.2. Aprendizagens desenvolvidas

5.2.1. Função afim

Reconhecimento de uma função afim nas várias representações

O estudo da função afim possibilita a análise de situações semirreais, próximas da realidade do quotidiano e dos próprios alunos. Assim se caracterizam parte das tarefas realizadas durante a unidade de ensino, particularmente no que se concerne ao estudo da função afim, onde se procurou que os alunos identificassem e trabalhassem a função afim em diferentes representações. Desta forma, a conversão entre representações diferentes tem uma forte presença ao longo da unidade de ensino.

Na ficha 5, onde é solicitado que os alunos encontrem um modelo matemático adequado à situação apresentada, os grupos não evidenciaram dificuldades em identificar a função afim como resposta, tendo facilmente recorrido à escrita da expressão analítica para responder às questões colocadas, como se pode observar na resolução do grupo A (Figura 25).

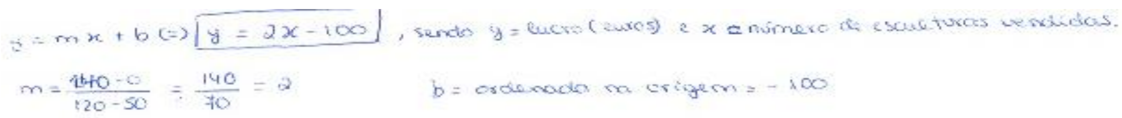


Figura 25 – Q1.4., F5, grupo A

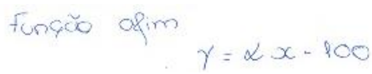


Figura 26 – Q1.4., F5, grupo B

Também o grupo B respondeu corretamente, referindo que se trata de uma expressão analítica de uma função afim (Figura 26).

Aquando da discussão geral da ficha, foi possível observar que, para a maioria dos alunos, identificar uma função afim a partir de uma representação verbal é mais difícil do que a partir de uma representação gráfica. O papel da professora foi fundamental na promoção da conexão entre as diferentes representações: verbal e gráfica. Quando questionados pela professora sobre o significado da expressão "*L=2n-100*", onde n representa o número de esculturas e L o lucro com a venda de n esculturas, verificou-se que os alunos se encontravam inteiramente à vontade com a resolução geométrica, explicando que 2 representa o declive e -100 a ordenada da origem. A compreensão dos conceitos de declive e ordenada na origem são fundamentais no estudo da função afim, assim como a sua interpretação geométrica. Neste sentido, é também desejável a atribuição de significado aos coeficientes m e b, de acordo com o contexto, para além do significado geométrico. No caso da situação apresentada na ficha 5, associando finalmente 2n ao ganho com a venda de n peças e 100 com o prejuízo total, facilmente os alunos entenderam o lucro como a diferença entre o que se ganha e o que se gasta. Assim, foi possível associar o declive da reta com o preço de cada escultura e a ordenada na origem com o gasto (preço de uma *Playstation*).

Constatou-se que a conversão da representação analítica para a gráfica não ofereceu grande dificuldade. Na questão 2. da ficha 6 os alunos desenharam corretamente, com o auxílio das calculadoras gráficas, os gráficos de funções afins representadas analiticamente. A identificação de uma função afim através do seu gráfico – reta não vertical – trata-se de algo que os alunos já haviam trabalhado em anos letivos anteriores. A conversão entre as representações algébricas e gráficas e a identificação de funções afins representadas gráfica ou algebricamente não ofereceu dificuldades, assim como a identificação da ordenada na origem e do declive para ambas as representações. A conversão entre diferentes representações foi sendo aprofundada à medida que se desenvolveu a unidade de ensino e verificou-se que gradualmente as dificuldades foram diminuindo.

A conexão de conteúdos programáticos (geometria e funções), aparentemente distintos do ponto de vista dos alunos, é extremamente importante e fulcral neste ponto temático, onde conhecimentos previamente adquiridos são aplicados a novas situações. Na questão 2.1. da ficha 7 solicitar a resolução de equações impôs uma interpretação por parte dos alunos que os levasse a concluir que o que era solicitado era precisamente a determinação de objetos cujas imagens eram conhecidas. Quando o objetivo é a determinação de objetos (ou imagens) conhecendo imagens (ou objetos) é desejável que exista uma diversidade de enunciados que, aparentemente diferentes, exijam o pretendido. Neste sentido, também aqui a conexão das funções com as equações é evidente, para além da conexão das funções com a geometria.

Quando se pretende que os alunos identifiquem uma função afim e que escrevam a sua expressão analítica pede-se, no fundo, que seja encontrada a equação reduzida de uma reta não vertical. Tal foi explicitamente pedido na questão 2.2. da ficha 7. A determinação da expressão algébrica de funções constantes nunca ofereceu dificuldades e, nomeadamente, na questão 2.2. da ficha 7, todos os grupos identificaram *y=3* como equação reduzida da reta BC. De notar que, ao ser pedido uma equação reduzida da reta, o grupo C escreve corretamente na sua resposta "*F(x)=3*" para a reta BC, "*F(x)= x+3*" para a reta AB e "*F(x)= 3x+9*" para a reta CD. Os outros dois grupos não empregaram na sua nomenclatura "*F(x)=*" mas sim "*y=*".

A determinação das equações das retas pretendidas impôs uma análise da correspondência entre alguns objetos e respetivas imagens, perante uma representação gráfica de funções. Ao contrário do que sucedeu numa fase inicial, aquando da resolução da ficha 7, todos os grupos identificaram sem qualquer dificuldade uma infinidade de objetos com a mesma imagem. Este facto assume importância na compreensão do caso particular da função afim: a função constante.

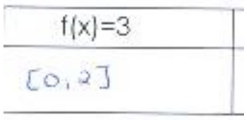


Figura 27 – Q2.1., F7, grupo A

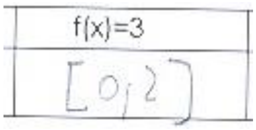


Figura 28 – Q2.1., F7, grupo B

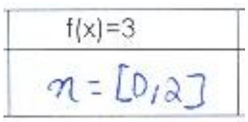


Figura 29 – Q2.1., F7, grupo C

A determinação da expressão algébrica que caracteriza as retas AB e CD foi feita tendo como base o conhecimento de dois objetos e das respetivas imagens. Assim os grupos determinaram o declive de cada reta e posteriormente a ordenada na origem. A título de exemplo vejamos as resoluções dos alunos para a reta CD, onde para a determinação do declive, os grupos A e C recorreram a fórmulas anteriormente estudadas e agora recordadas: $m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$. O grupo B recorreu exatamente à mesma estratégia, mas usou as coordenadas de um vetor diretor de uma reta.

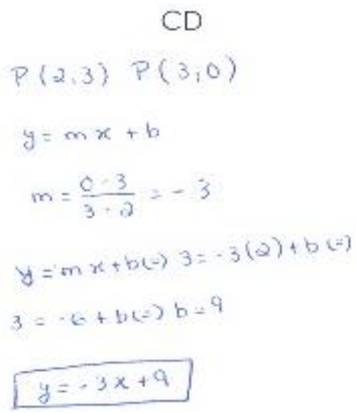


Figura 30 – Q2.2., F7, grupo A

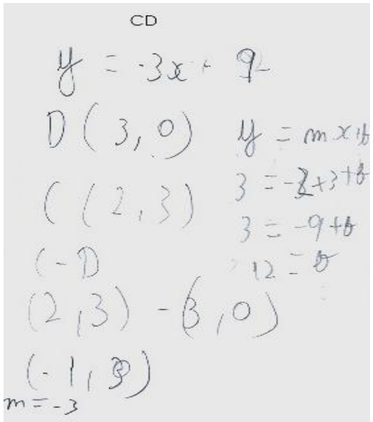


Figura 31 – Q2.2., F7, grupo B

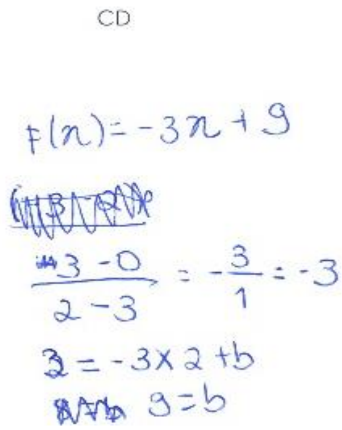


Figura 32 – Q2.2., F7, grupo C

Propriedades da função afim

Na ficha 5 a interpretação contextualizada que acompanha a análise gráfica revelou-se uma mais-valia tendo os grupos respondido sem dificuldade às questões colocadas. O grupo B apresenta-se como sendo o que menos facilidade teve na resolução da tarefa, tendo-a, ainda assim, concluído bastante satisfatoriamente.

As justificações apresentadas pelos grupos para a resposta à questão 1.1. da ficha 5 revelam uma boa compreensão e interpretação da situação apresentada.

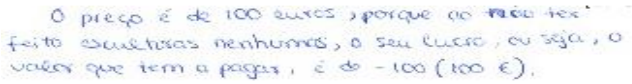

O preço é de 100 euros, porque ao não ter feito esculturas nenhumas, o seu lucro, ou seja, o valor que tem a pagar, é de -100 (100 €).

Figura 33 – Q1.1., F5, grupo A

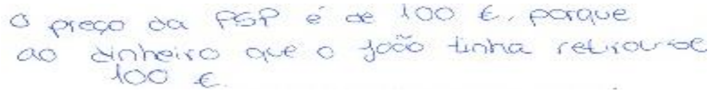

O preço da PSP é de 100 €, porque ao dinheiro que o João tinha retirou-se 100 €.

Figura 34 – Q1.1., F5, grupo B

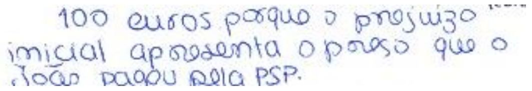

100 euros porque o prejuízo inicial apresenta o preço que o João pagou pela PSP.

Figura 35 – Q1.1., F5, grupo C

A justificação apresentada pelos grupos A e C baseia-se no facto de o João se encontrar inicialmente numa situação de prejuízo. É possível determinar graficamente a imagem de zero e fazer a interpretação contextualizada do significado das coordenadas do ponto (0, -100): antes da venda de qualquer escultura o lucro inicial do João tem um valor negativo de -100 euros. O grupo A explica de forma minuciosa essa evidência (Figura 33), bem como o grupo C. Este identifica ainda "lucro negativo" com o correto sinónimo de "prejuízo" (Figura 35). Pode considerar-se que o grupo B recorreu a uma justificação de nível mais concreto ao referir que, do dinheiro que o João possuía, foram retirados 100 euros. De notar que está referido no enunciado que o João não tinha dinheiro inicialmente. Assim, apesar de responder corretamente à questão 1.1, o grupo B não apresenta uma justificação tão rigorosa como a dos outros dois grupos, embora seja percetível a compreensão da situação. Tal pode ser comprovado na resposta à questão seguinte, onde este grupo refere que "O preço de cada escultura é de 2 euros porque com a venda de 50 esculturas teve lucro 0. Significa que pagou com 50 esculturas a PSP, logo 100/50=2". O grupo C também refere que cada escultura custa 2 euros "pois para obter 100 euros precisou de vender 50 esculturas 100/50=2". O grupo A identifica também corretamente o preço de cada escultura e justifica a afirmação unicamente com cálculos.

No quadro, um elemento do grupo A (A1) inicia a discussão geral da ficha, indicando o preço da PSP sem promoção, donde surgiu a seguinte discussão:

Aluna A1: 100 euros porque ao produzir… quando não tem esculturas nenhumas faltavam 100 euros para atingir lucro, ou seja era o preço da peça, pois só depois de pagar a *Playstation* é que consegue obter lucro.

(…)

Aluno F: Pensei que ele tivesse gasto (…) dinheiro nos materiais que estava a utilizar e que o dinheiro que ele estava a usar nesses materiais estava contar como negativo e então que (…) primeiro tinha de ganhar o dinheiro que tinha perdido nesses materiais e depois o dinheiro que ia ganhar para ter a *Playstation*.

Professora: Como é que podemos tirar a dúvida?

Aluno G: Está aqui escrito no enunciado…

Professora: O G. está a tentar explicar. (…) Está uma frase importante no enunciado que tirava essa dúvida. Qual é?

Aluno M: Materiais reutilizáveis!

Professora: Materiais reutilizáveis. Está bem. E mais ainda?

Aluno G: Como não tinha dinheiro nenhum.

Professora: Como não tinha dinheiro nenhum!

(…)

Aluno M: Oh professora, mas podia estar com dívidas pendentes!

Professora: Então, mas eu tinha que ter escrito isso no enunciado… e não estava, está bem?

De facto, mesmo com o raciocínio correto, uma falha de interpretação do enunciado ou acrescentar dados ao enunciado que nele não constam pode fazer com que os alunos escrevam uma representação algébrica que não traduz o problema. A colaboração dos alunos na discussão geral, juntamente com a intervenção da professora, contribuiu para o esclarecimento destes aspetos.

Todas as considerações apresentadas pelos grupos na resolução das questões da ficha 5 implicam um bom domínio na identificação de objetos e imagens perante específicas representações de funções (gráfica e verbal). Quando questionado sobre qual foi o lucro máximo do João, o grupo A justifica a sua afirmação com base na representação gráfica apresentada, ao associar o máximo absoluto da função ao lucro máximo pretendido (Figura 36). O grupo B não o calcula corretamente por não contabilizar os 100 euros de prejuízo inicial (Figura 37). A justificação numérica apresentada pelo grupo B e pelo grupo C (Figura 38) conduz a resultados verdadeiros para o último mas falsos para o primeiro, pelo facto do modelo matemático encontrado não ser válido.

Figura 36 – Q1.2., F5, grupo A

Figura 37 – Q1.2., F5, grupo B

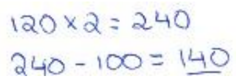


Figura 38 – Q1.2., F5, grupo C

A determinação do máximo de uma função foi feita de forma analítica e gráfica por diferentes grupos. A aluna A1 do grupo A quando se desloca ao quadro para responder à questão 1.2. da ficha 5 apresenta as duas abordagens na justificação da questão:

> **Professora:** E o máximo?
>
> **Aluna A1:** Nós fizemos de duas maneiras. Vimos o máximo absoluto da função que era 140, mas também podemos multiplicar os 120 por 2. (aponta, no gráfico desenhado no quadro, para a abcissa de 120 e, confrontada com o resultado de 120x2 dar 240 em vez dos esperados 140, a aluna apaga o que escreve e manifesta-se, aparentemente, baralhada)
>
> **Aluno T:** Menos 100!
>
> **Aluno R:** Tem de ser, ´stora, tem de ser 120x2 – 100!
>
> **Professora:** Exatamente!

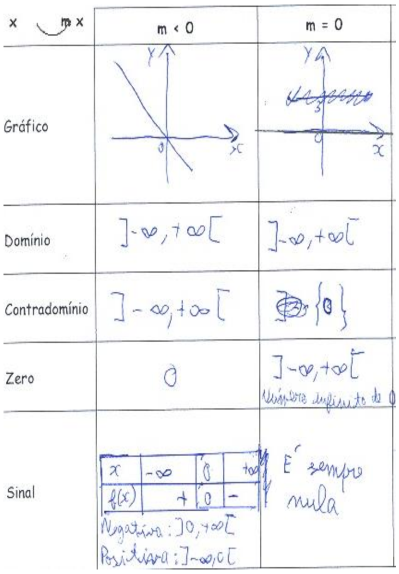
A identificação e a representação do mesmo conceito (máximo) de formas diferentes foi assim apresentada aquando da discussão geral da questão, onde ambas as justificações/representações foram expostas e exploradas.

Na ficha 6, com base nos gráficos desenhados de funções afins, foi possível identificar várias propriedades desse tipo de funções, nomeadamente para os casos particulares de $y=mx$, entre as quais: o gráfico, o domínio, o contradomínio, os zeros, o sinal e a monotonia. Neste campo, existem dificuldades evidenciadas pelo grupo B, no estudo da monotonia, do sinal e na determinação de zeros.

A interpretação geométrica do declive de uma função afim permitiu facilmente tirar conclusões sobre a relação entre o seu sinal e a monotonia da função. Os grupos A e C concluíram que quando m tem sinal positivo a função é crescente, quando m tem sinal negativo a função é decrescente e quando m é nulo a função é constante. Os grupos A e C reconhecem esta última conclusão referindo, respetivamente, que quando m é nulo “a reta é coincidente com *Ox*” e “a reta é paralela ao eixo das abcissas”. A justificação particular (para $b=0$) apontada pelo grupo A não generaliza mas revela compreensão da situação. A justificação apontada pelo grupo C já é mais generalizante revelando compreensão da situação. O grupo B teve mais dificuldade, não conseguindo tirar nenhuma conclusão sobre a influência do declive na função afim. De notar que a questão 2.2. da ficha 6 se trata de uma questão aberta em que era perguntado aos alunos que explicassem o que é que observavam nas situações em que $m=0$, $m>0$ *ou* $m<0$. Desta forma, não se pedindo explicitamente que os alunos relacionassem a influência do parâmetro m com a monotonia da função, tornou-se mais difícil para o grupo B o estabelecimento dessa relação. O grupo apenas refere exemplo para cada situação: “nulo” para $m=0$, “x, $3x$” para $m>0$ e “$-x$,$-3x$” para $m<0$.

Apesar de inicialmente a conversão da representação analítica para gráfica ter sido feita corretamente (questão 2.), na questão final da ficha 6 (Figura 40), o grupo B faz um esboço incorreto do gráfico da função $f(x)=0$, o que conduziu a conclusões erradas sobre as suas propriedades: o grupo identifica apenas “0” como único zero da função referida e IR como contradomínio. Já o grupo C, que desenhou corretamente o gráfico da referida função, identificou também erradamente IR como o conjunto que define o contradomínio da função $f(x)=0$ (Figura 41).

Como já foi referido, a identificação de um conjunto infinito de objetos com determinada imagem foi difícil para os alunos, mas foi evoluindo positivamente. O mesmo se passou com a identificação de uma única imagem comum a um conjunto infinito de objetos, caso caraterístico da função constante (Figura 40). De notar que o grupo A teria começado por escrever exatamente o mesmo que o grupo B no contradomínio da função $f(x)=0$, mas acabando por riscar a tentativa inicial, responde corretamente (Figura 39).



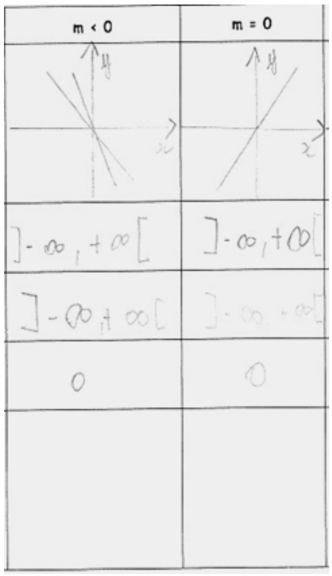


Figura 39 – Q2.3., F6, grupo A   Figura 40 – Q2.3., F6, grupo B

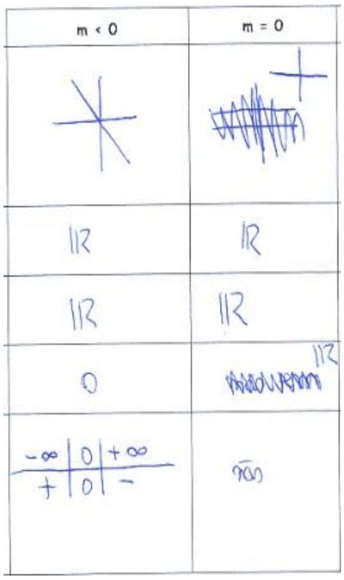


Figura 41 – Q2.3., F6, grupo C

Um dos elementos do grupo C (a C1) foi ao quadro explicar a resolução da questão 2.3. da ficha 6, escrevendo o que havia concluído na ficha de trabalho (Figura 41). Assim que preenche a linha referente ao contradomínio, o aluno R intervém:

> **Aluno R:** Discordo!
>
> **Professora:** Porque é que o R. discorda?
>
> **Aluno R:** Porque quando m é igual a zero o contradomínio é zero.

Professora: O facto de a C1 estar a dizer que o contradomínio é IR está a dizer que todos os números são imagens.

Aluna C1: Yah!

Professora: Por exemplo, há algum objeto que tenha imagem 3 ou 4?

Aluna C1: Não [apaga e substitui IR por 0].

(…)

Professora: Agora, quais são os zeros da primeira?

Aluna C1: É o zero.

(…)

Professora: É o zero, tal como na…

Alunos C1: Na segunda…. [bastante insegura]

Professora: É verdade, na segunda 0 também é um zero. Mas é o único?

Aluna C1: São todos! IR!

Se, por um lado, a determinação das equações das retas pretendidas impõe uma análise da correspondência entre alguns objetos e respetivas imagens, por outro, também a determinação de objetos com determinada imagem (ou vice-versa) impõe a determinação das equações das retas que os contêm. Como já foi referido, na questão 2.1. da ficha 6, perante uma representação gráfica da função *f*, os alunos têm de resolver as equações: $f(x)=0$; $f(x)=3$ e $f(x)=1$. Todos os grupos resolveram facilmente as duas primeiras por observação gráfica. A última, não podendo ser resolvida apenas por observação gráfica, gerou dificuldades no grupo B. De facto, verificamos que a reta AB contém o ponto de coordenadas (-2, 1), pelo que a solução $x=-2$ foi facilmente encontrada. No entanto, não é possível identificar graficamente, na reta CD, qual a abcissa do ponto que lhe pertence que tem ordenada 1. Assim, apenas os grupos A e C procederam à determinação da equação da reta CD, para posteriormente, a partir da representação algébrica, determinarem a abcissa pretendida (Figura42 e Figura44). O grupo B limitou-se a responder tendo por base exclusivamente a observação gráfica (Figura 43). De facto, no enunciado era pedido que a questão 2.1. fosse resolvida por observação gráfica. Foi intencionalmente colocada a alínea 2.1.3. com o propósito de confrontar os alunos com a importância que tem a validação analítica dos valores lidos em qualquer gráfico. Aquando da discussão geral foi possível confrontar todos os alunos da turma com este facto.

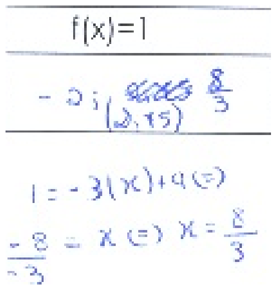


Figura 42 – Q2.1., F7, grupo A

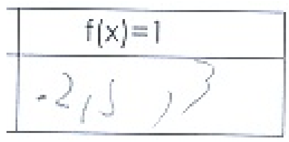


Figura 43 – Q2.1., F7, grupo B

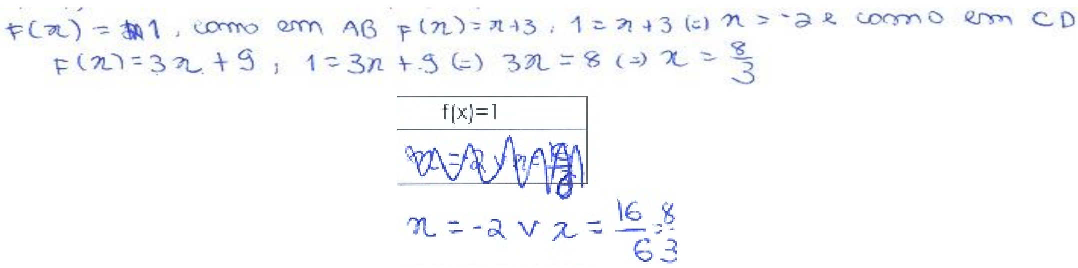


Figura 44 – Q2.1., F7, grupo C

Verifica-se que o rigor na escrita ainda não estava adquirido, nomeadamente para o grupo C que recorreu ao sinal de igual em vez de usar o símbolo de pertence (Figura 29) ou para o grupo B que recorre a nomenclatura incorreta para os vetores (Figura 31). Pormenores relacionados com o rigor da escrita foram evoluindo ao longo da unidade de ensino por parte dos três grupos.

Em síntese, as principais dificuldades relacionadas com a conexão entre diferentes representações, bem como com estudo de algumas propriedades da função afim podem resumir-se nos seguintes quadros.

Representação final / Representação inicial	Verbal	Gráfica	Algébrica
Verbal			x
Gráfica	x		x
Algébrica		x	

Quadro 5 – Dificuldades de conversão entre representações de funções afins

Propriedades \ Grupos	A	B	C
Domínio			
Contradomínio		x	x
Zeros		x	
Objetos e imagens		x	x
Monotonia		x	
Sinal		x	

Quadro 6 – Dificuldades no estudo de algumas propriedades da função afim

As dificuldades apontadas no quadro 6 são as encontradas durante o estudo da função afim: iniciais e finais. Desta forma, verifica-se que o grupo B foi aquele que teve mais dificuldades ao longo do estudo da função afim. No entanto, algumas das mesmas evoluíram, não se constituindo dificuldades no final do estudo. O grupo A não apontou dificuldades ao longo do estudo da função afim e o grupo C apesar de ter tido dificuldades na determinação de contradomínios e de objetos e imagens, também ultrapassou as mesmas com o desenvolvimento da unidade de ensino.

5.2.2. Função definida por ramos

Reconhecimento de uma função definida por ramos nas várias representações

A compreensão e a formalização de uma função definida por ramos nas suas várias representações são objetivos desta unidade de ensino pelo que as fichas de trabalho elaboradas tiveram, entre outros, esse mesmo propósito. Tendo em conta os conhecimentos prévios dos alunos, as funções definidas por ramos estudadas envolveram apenas funções afins e funções quadráticas.

Em diversas situações do quotidiano surgem situações que podem ser modeladas por uma função definida por ramos. Optou-se pela introdução de uma situação contextualizada no início do estudo deste tipo de funções acreditando que tal permite mais facilmente a sua compreensão, por parte dos alunos. A primeira questão da ficha 7 apresenta uma situação estudada pelos alunos anteriormente na ficha 2, onde uma função definida por ramos é apresentada graficamente, estabelecendo a relação entre o preço a pagar num parque de estacionamento e o tempo decorrido. A compreensão do que é apresentado no enunciado foi evidenciada por todos os grupos, tendo o preenchimento da tabela da questão 1.1. sido efetuado corretamente, evidenciando uma boa interpretação gráfica da função em causa por parte dos alunos. Nenhum grupo apresentou dificuldades em converter a representação gráfica em numérica/tabelar (Figuras 45, 46 e 47).

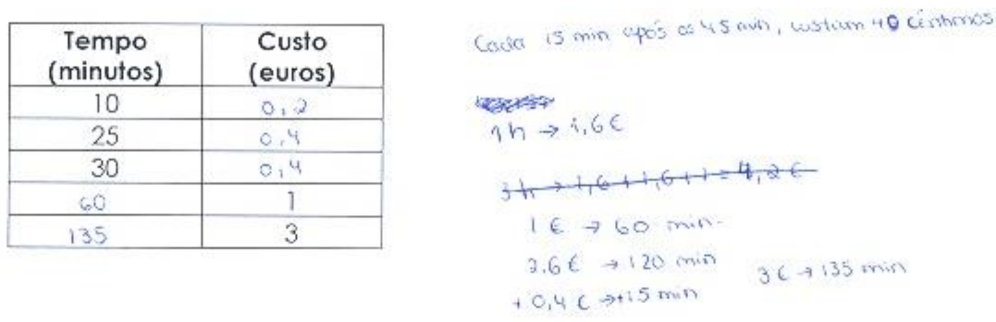
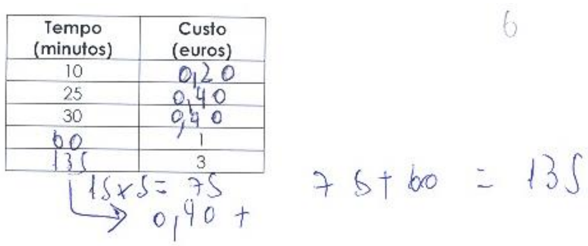


Figura 45 – Q1.1., F7, grupo A



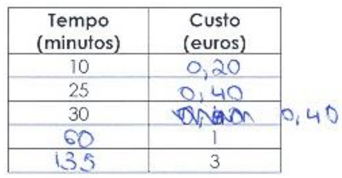


Figura 46 – Q1.1., F7, grupo B

Figura 47 – Q1.1., F7, grupo C

Como se pode verificar nas respostas à questão 1.2. também a conversão da representação gráfica para verbal não ofereceu dificuldades aos alunos. O grupo B identifica que se trata de uma função definida por ramos (embora naturalmente não se exprima dessa forma) ao referir que "até aos primeiros 45 minutos é uma função que varia de 15 em 15 minutos, (…), a cada 15 minutos aumenta 0,20 cêntimos, a partir dos 45 minutos é uma função de proporcionalidade, que a cada 15 minutos aumenta 0,40 cêntimos" (Figura 49). O grupo faz uma primeira divisão em dois intervalos (até os 45 minutos e depois dos 45 minutos), acabando por subdividir o primeiro em três. Os outros dois grupos também identificam os quatro intervalos caraterizantes da função (Figura 48 e Figura 50). Ao separar a função nestas "quatro partes", os grupos identificam os quatro ramos que a compõem. Como nota, há a referir que o grupo B não apresenta a unidade de medida corretamente, pois seriam 0,20 euros e não cêntimos.

Nos primeiros 15 min, inclusive, o custo é de 0,2 €. Nos 15 min, até aos 30 min, inclusive, o custo é de 0,4 € e até aos 45 min, inclusive, o custo é de 0,6 €. A partir dos 45 min, por cada 15 min de estacionamento, paga-se mais 0,4 € (por cada 15 min, mais 0,4 €).

Figura 48 – Q1.2., F7, grupo A

Até aos primeiros 45 minutos é uma função que varia de 15 em 15, ou seja, a cada 15 minutos ~~aum~~ aumenta 0,20 cêntimos, a partir dos 45 minutos é uma função de proporcional, que a cada 15 minutos, aume- nto 0,40 cêntimos

Figura 49 – Q1.2., F7, grupo B

Nos primeiros 15 minutos paga-se sempre 0,20 €, nos 15 minutos seguintes paga-se sempre 0,40 € e dos 30 m (exclusivo) aos 45 (inclusivo) o preço é sempre 0,60 €. A partir dos 45 minutos, o preço já varia consoante o tempo passando a ser 0,40 € por cada 15 minutos.

Figura 50 – Q1.2., F7, grupo C

A representação algébrica de uma função definida por ramos é novidade para os alunos do 10.º ano. Situações de funções definidas por ramos já haviam surgido no 9.º ano, mas com maior incidência na interpretação gráfica de situações contextualizadas (representações gráfica e verbal). Aquando da realização da primeira questão da ficha 7, após exploradas as conversões entre a representação gráfica e as representações verbal e tabelar, considero que a definição algébrica de uma função por diferentes expressões em diferentes partes do seu domínio surgiu naturalmente. A questão 1.3., que pedia que os alunos representassem a função analiticamente, apesar de ter gerado algumas dificuldades, como seria de esperar, revelou-se produtiva e profícua. As respostas à mesma apresentam-se de seguida.

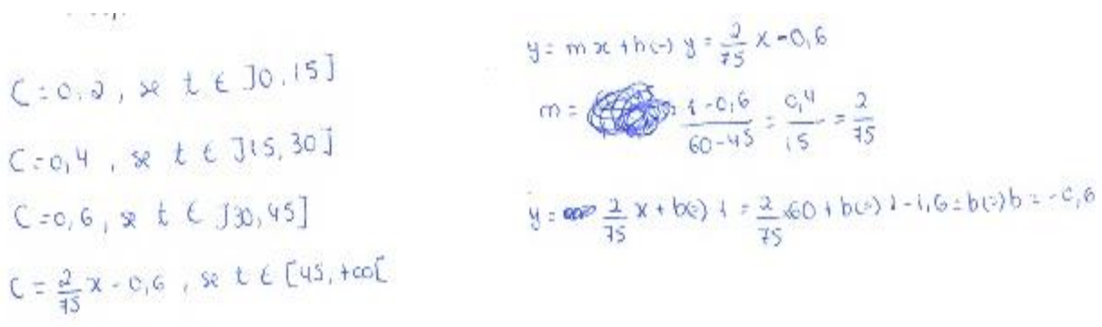


Figura 51 – Q1.3., F7, grupo A

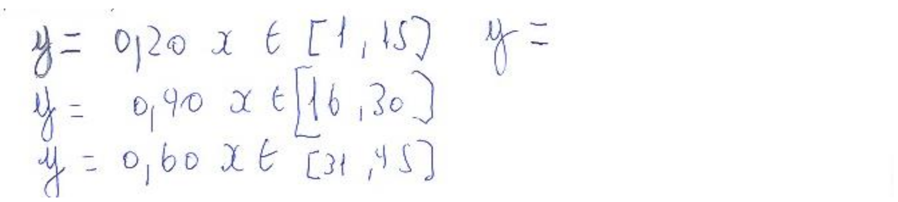


Figura 52 – Q1.3., F7, grupo B

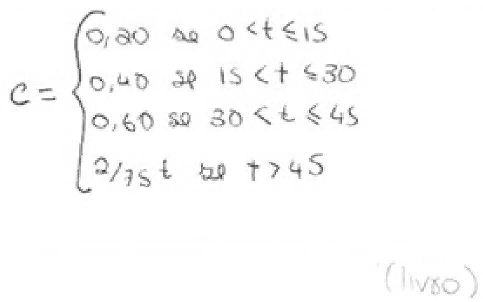


Figura 53 – Q1.3., F7, grupo C

A ficha 7 é uma ficha introdutória ao estudo das funções definidas por ramos e, portanto, foi tentado que, naturalmente, os alunos conseguissem chegar à formalização algébrica das mesmas por eles próprios. O grupo B foi o que apresentou dificuldades nesta questão. O último ramo da função não ficou representado e apesar da expressão analítica dos três primeiros ramos ter sido bem determinada, verifica-se que o grupo teve dificuldade na escrita do domínio de cada um dos ramos. A dificuldade do grupo B para escrever a expressão representante do último ramo da função tem a ver com a escrita da expressão analítica da respetiva reta. Ao ter dificuldade em formalizar a expressão algébrica da função definida por ramos representada graficamente, o grupo B solicitou novamente ajuda à professora.

Aluna B2: É a expressão algébrica?

Aluno B1: Mas não conseguimos, mas não… a expressão algébrica não vai ser a mesma daqui para aqui…. Temos duas!

Professora: Ou quantas? Será que…

Aluno B1: Não! Não é duas! É uma, duas, três.

Professora: A primeira é quando?

Aluno B1: É y=20.

Professora: Quando? [silêncio] Durante quanto tempo?

Aluno B1: 15!

Professora: Y=0,20. É a primeira, mas depois convém dizer mais sobre isso, não é? Y=0,20 quando…

Aluno B1: De zero a quinze.

Professora: E depois…

Aluno: Y=0,40, quando quinze [a] trinta!

Professora: Exatamente. Tentar especificar isso, está bem?

Aluno B1: Em intervalos?

Professora: Exatamente. (afasta-se do grupo e a aluna B2 começa a escrever na folha de repostas)

O grupo acabou por apresentar uma expressão analítica incompleta, sem o último ramo e incorreta a nível dos intervalos do domínio de cada ramo (Figura 52). Os grupos A e C já demonstram melhor compreensão neste domínio. Embora o grupo A não apresente o símbolo de chavetas (ainda não havia sido introduzida essa notação em contexto de sala de aula), considera-se, num contexto inicial, uma boa representação feita pelo grupo, bem como a justificação para a mesma (Figura 51). Embora a ausência das chavetas possa conduzir a uma aparente multiplicidade de funções, o grupo representa sempre a função com a mesma letra e, portanto, percebe-se que a interpretação é a correta. Este aspeto também é verificado no grupo B. O grupo C representa algebricamente a função, usando o símbolo das chavetas, mas apresentando a expressão analítica do último ramo incorretamente (falta a ordenada na origem). Quando lhes foi pedido que justificassem a simbologia das chavetas o grupo respondeu que foi ver ao livro "como se fazia". Pode ser visto "(livro)" escrito no canto inferior direito da ficha do grupo (Figura 53). De facto, nunca houve a proibição da consulta do manual como ajuda para a resolução das questões propostas, e o facto de o grupo C ter usado esse recurso revela vontade de aprender e de resolver corretamente as questões propostas.

Se no enunciado da questão 1.3. não foi dada qualquer indicação de como se representa analiticamente uma função definida por ramos, já na questão 2.3. a representação analítica da função já era apresentada utilizando as chavetas, com espaços em branco para os alunos completarem. A dificuldade inicial do grupo B relativa ao domínio da função definida por ramos já não existiu na questão 2.3. e os três ramos foram bem definidos em cada um dos seus domínios, sendo estes últimos também representados corretamente. A questão 2. da ficha insiste ainda na conversão da representação gráfica na analítica, verificando-se uma evolução positiva nos três grupos, comparativamente com a questão 1. da mesma ficha. A determinação das equações reduzidas das retas que contém cada um dos ramos constituintes da função não gerou dificuldades, o que evidenciou uma boa consolidação/revisão dos conteúdos abordados anteriormente relativos à função afim.

A conversão da representação analítica na gráfica foi pedida na questão 3. da ficha 7 e na questão 2.3. da ficha 12. Na ficha 7 os três grupos representaram corretamente e sem qualquer dificuldade a função de forma gráfica, onde os dois ramos que a constituíam eram semirretas (uma com declive positivo e outra com declive nulo).

Propriedades da função definida por ramos

Na compreensão do conceito de função definida por ramos e no estudo das suas propriedades torna-se necessário que os alunos possuam um bom conhecimento sobre conjuntos, conjuntos numéricos, referenciais cartesianos e, no caso particular da unidade de ensino, funções afins e funções quadráticas.

A determinação de objetos e imagens de funções definidas por ramos foi abordada aquando do estudo das mesmas e, numa fase inicial, os alunos não manifestaram muitas dificuldades perante a representação gráfica de uma função. Verificou-se que aquando da resolução a pares da primeira questão da ficha 7, o grupo B determinou quanto tempo teria uma pessoa de ficar no parque para pagar três euros de uma forma um pouco elementar, tendo, antes disso, solicitado a minha ajuda por ter tido alguma dificuldade inicial. Foi desenvolvido o seguinte diálogo:

> **Professora:** O que é que acontece a partir dos 45 minutos?
>
> **Aluno B1:** 1 euro…
>
> **Aluna B2:** Há um aumento.
>
> **Aluno B1:** Sim, mas é proporcional.
>
> **Professora:** Passa quanto tempo e aumenta quanto?
>
> **Aluno B1:** Ahhh! 40 Cêntimos!
>
> **Professora:** Sim, aumentou 40 cêntimos e quanto tempo passou?
>
> **Aluno B1:** Só… só 15 minutos.
>
> **Professora:** Então vá. (afasta-se do grupo e a discussão continua a pares)
>
> **Aluno B1:** 75 mais 15… quanto é que dá 75 mais 15? Agora fazes, tipo, 40…
>
> **Aluna B2:** Ainda falta bué para chegar aos 3 euros!
>
> **Aluno B1:** Um euro e 40, isso ajuda-nos, mas vai demorar bué!
>
> **Aluna B2:** Então, mas 'pera' lá… quanto é que estamos a aumentar? É 40 cêntimos, não é?
>
> **Aluno B1:** Dá 1.8… (Aluna B2 continua a somar na calculadora até chegar aos 3 euros)

Apesar de ter sido encontrado o valor pretendido (135 minutos), este foi determinado de forma elementar e a dificuldade inicial persistiu na determinação da expressão analítica da reta. Por este motivo, o grupo não representou algebricamente o último ramo da função (Figura 52).

O grupo B evidenciou também dificuldades na determinação de objetos e imagens no ponto de transição entre os ramos. Trata-se de um ponto de grande importância, onde o "código das bolinhas abertas e fechadas" (nas palavras dos alunos) tem de ser novamente abordado e recordado. A compreensão deste "código" também gerou dificuldades aquando da escrita, para cada ramo, de cada intervalo do domínio da função. Como já foi referido o grupo B foi o que evidenciou mais dificuldades nesta questão. Relacionado com este aspeto, como já foi mencionado, a escrita de cada intervalo do domínio da função nem sempre foi fácil e esse facto está relacionado precisamente com a leitura de objetos com determinada imagem, objetos esses que pertencem ao domínio naturalmente.

Na questão 1.3. da ficha 7, o grupo B, tentando encontrar os valores que delimitam os três primeiros ramos, acaba por não definir a função nos seguintes intervalos pertencentes ao domínio: [0,1[,]15,16[,]30,31[e]45, +∞[(Figura 52). Portanto, no caso das funções definidas por ramos, a identificação do domínio da função revelou difícil no caso do grupo B, o que não se verificou nos outros grupos. Apesar de oralmente (durante o diálogo desenvolvido entre o grupo e a professora, apresentado na secção anterior) o grupo B ter respondido corretamente, acabou por escrever de forma incorreta cada intervalo do domínio da função. O primeiro intervalo em vez de [0,15] foi escrito como [1, 15]. Relativamente a este aspeto, foi possível verificar, através do som do gravador áudio que ficou perto do grupo B, a discussão entre os dois alunos.

Aluno B1: Mas não é bem zero porque o intervalo é aberto.

Aluna B2: Então mais um bocadinho… De zero aberto!

Aluno B1: Mas o zero não conta por isso devia ser um.

Aluna B2: Devia ser quê?

Aluno B1: Devia ser um acho eu, porque como o zero é aberto não devia contar. Devia ser um minuto acho eu.

Aluna B2: Até porque nos parques de estacionamento tu não pagas o zero!

Aluno B1: Se tu estiveres lá zero minutos não pagas!

Aluna B2: Pois, é isso!

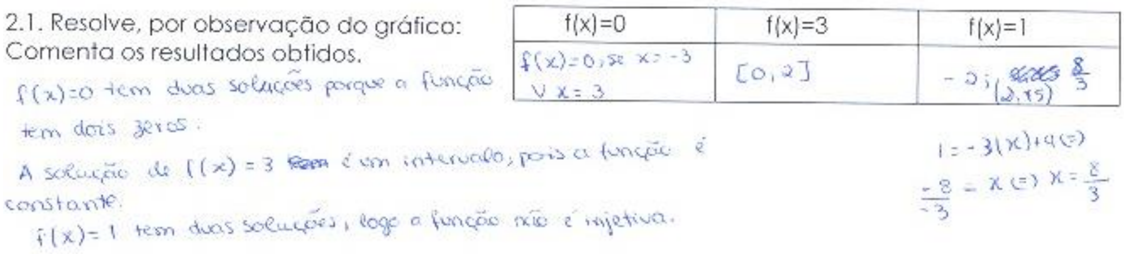
Aluno B1: Há lá ‘gajos’ que ficam lá 2 ou 3 minutos, voltam e também não pagam nada!

Aluna B2: Então chega só um!

Aluno B1: Sim!

A dúvida do grupo foi esclarecida aquando da discussão oral, onde foi explicado que perante o enunciado, de facto, é possível, por exemplo, permanecer no parque apenas meio minuto, mas que tem de ser pago. Nas questões seguintes o grupo B já apresentou corretamente cada intervalo do domínio de cada função definida por ramos.

No geral, verificou-se que a determinação de objetos e imagens de funções definidas por ramos pode tornar-se fácil no caso de representações gráficas. A identificação de infinitos objetos com a mesma imagem não gerou dificuldades e os três grupos identificaram, na questão 2.1. da ficha 7, [0,2] como conjunto solução de f(x)=3. O grupo A justifica este facto pelo seguinte: “ a solução de f(x)=3 é um intervalo pois a função é constante” (Figura 54). O grupo C justifica da mesma forma (Figura 56).

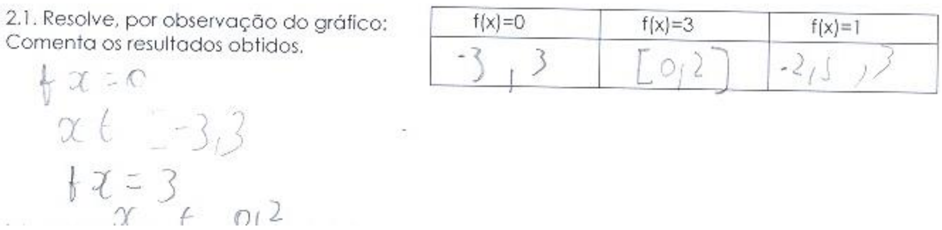


2.1. Resolve, por observação do gráfico:
Comenta os resultados obtidos.

f(x)=0	f(x)=3	f(x)=1
f(x)=0, se x=-3 V x=3	[0,2]	-2; $\frac{8}{3}$ (2,75)

f(x)=0 tem duas soluções porque a função tem dois zeros.
A solução de f(x)=3 é um intervalo, pois a função é constante.
f(x)=1 tem duas soluções, logo a função não é injetiva.
1=-3(x)+9 (=)
$\frac{-8}{-3}$ = x (=) x = $\frac{8}{3}$

Figura 54 – Q2.1., F7, grupo A

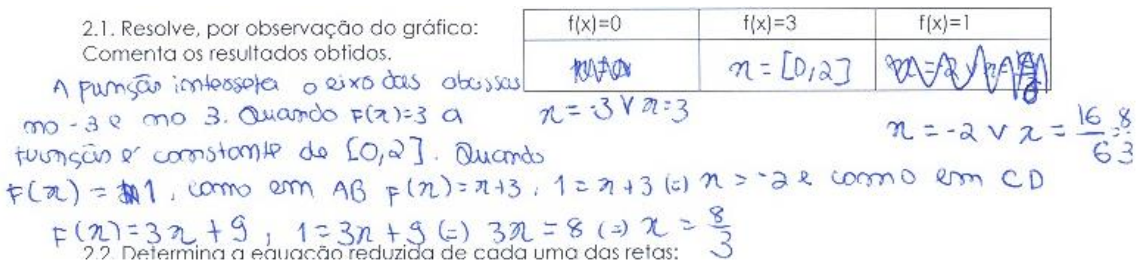


2.1. Resolve, por observação do gráfico:
Comenta os resultados obtidos.

f(x)=0	f(x)=3	f(x)=1
-3 , 3	[0,2]	-2,5 , 3

f x = 0
x ∈ -3,3
f x = 3
x ∈ 0,2

Figura 55 – Q2.1., F7, grupo B



2.1. Resolve, por observação do gráfico:
Comenta os resultados obtidos.

f(x)=0	f(x)=3	f(x)=1
	x = [0,2]	

A função interseta o eixo das abcissas no -3 e no 3. Quando F(x)=3 a função é constante de [0,2]. Quando F(x) = 1, como em AB F(x)=x+3, 1=x+3 (=) x = -2 e como em CD F(x)=3x+9, 1=3x+9 (=) 3x=8 (=) x = $\frac{8}{3}$
x = -3 V x = 3
x = -2 V x = $\frac{16}{6}$ $\frac{8}{3}$
2.2. Determina a equação reduzida de cada uma das retas:

Figura 56 – Q2.1., F7, grupo C

Quando a representação gráfica não possibilitava a determinação de objetos e/ou imagens a determinação da expressão analítica da função gerou dificuldades principalmente no grupo B. Tal aconteceu também na determinação dos objetos com imagem um (questão 2. da ficha 7), onde a resolução exclusivamente gráfica não possibilitava a determinação de valores exatos. Os alunos tinham que encontrar a expressão analítica da função definida por ramos, nomeadamente a condição que definia o último ramo da mesma: $y = -3x+9$. Apenas os grupos A e C evidenciaram esse raciocínio nas suas respostas, tendo o grupo B ficado pelo palpite sugerido pela observação da representação gráfica. De facto, no enunciado da questão pede-se que os alunos resolvam graficamente a questão. Esta foi colocada propositadamente com intuito de confrontar os alunos com a necessidade da confirmação analítica. Aquando da discussão no coletivo da ficha 7, a determinação dos objetos que têm imagem 1 ofereceu o seguinte comentário do aluno M: "Aqui não vejo muito bem, mas acho que é 2,75.". Quando a turma foi questionada sobre a certeza desse facto muitos alunos disseram que não tinham a certeza sem "fazer contas" e, nesse momento, a determinação da equação da reta CD impôs-se.

A determinação dos zeros era pretendida também na resolução da questão 2.1. da ficha 7. Não tendo gerado dificuldades, a determinação dos dois valores pertencentes ao conjunto solução de $f(x)=0$ foi feita corretamente pelos três grupos. O grupo A referiu que "$f(x)=0$ tem duas soluções porque a função tem dois zeros". O grupo B limitou-se a escrever a resposta: -3, 3. O grupo C acrescenta que "a função interseta o eixo das abcissas nos ponto -3 e 3".

Em síntese, as dificuldades encontradas no estudo das funções definidas por ramos prendem-se com a conversão da representação gráfica em algébrica, não merecendo dificuldades maiores a conversão da representação gráfica para as representações numérica ou verbal. No entanto, a escrita de uma expressão algébrica oferece algumas dificuldades na definição de cada intervalo do seu domínio. O grupo B foi aquele que teve mais dificuldade neste aspeto. Relativamente às propriedades das funções definidas por ramos, considero que a determinação de objetos e imagens também gerou alguns conflitos, nomeadamente no ponto de transição entre ramos. Relativamente à identificação do domínio e à determinação do contradomínio não se verificaram dificuldades. Questões relacionadas com os mesmos já haviam sido trabalhadas em fichas de trabalho anteriores, como por exemplo na questão 2. da ficha 3, na ficha 2 ou na questão 1. da ficha 4, e foi possível verificar no decorrer das aulas da unidade de ensino uma boa consolidação dos conteúdos.

Pode concluir-se que os alunos construíram o conceito de função definida por ramos mediante uma representação gráfica e o confronto com todas as representações possíveis: tabelar, verbal e, por fim, algébrica. Partindo do que os alunos já conhecem (Ausubel, 2002), foi possível ajudar os alunos na construção do conceito de uma função diferente das conhecidas anteriormente. O contato com as diferentes representações da mesma foi preponderante nessa construção e na formalização desejada no ensino secundário relativa à representação algébrica. Representação esta, que relativamente às funções definidas por ramos, terá grande importância ao longo do enino secundário.

5.2.3. Função quadrática

Reconhecimento de uma função quadrática nas várias representações

A função quadrática é estudada no 9.º ano em casos simples da forma $y=ax^2$, com a um número real não nulo. Considera-se que a representação gráfica deste tipo de função é a mais explorada no ensino básico, associada muitas vezes à modelação de situações reais ou de semi-realidade.

Na unidade de ensino a função quadrática foi abordada pela primeira vez com a ficha 8, onde era apresentada uma situação de contexto real, adaptada do manual escolar dos alunos (Neves, 2010), relativo à construção de caleiras para telhados. Começando por serem apresentados dois possíveis moldes para as caleiras dos telhados, perante diferente medidas de comprimento e largura do objeto, deve ser escolhido o que tem maior capacidade. Desta forma, os alunos começam por calcular o volume de dois objetos, acabando por fazer a correspondência entre dois valores de comprimento e os respetivos volumes. A determinação da expressão analítica que representa a área da base da caleira em função da altura da banda lateral x impõe a escrita da expressão algébrica que representa o comprimento da banda lateral ($30-2x$). O grupo B explicitou todo esse processo que envolve a conversão entre a representação verbal e a representação algébrica da função $A(x)$ (Figura 57). Também os outros dois grupos chegaram à expressão pretendida.

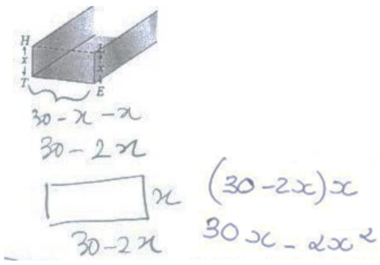


Figura 57 – Q2.a), F8, grupo B

As conversões da representação algébrica em tabelar e gráfica foram trabalhadas nas questões seguintes da ficha 8 e os três grupos revelaram facilidade nas mesmas. Todos os grupos representam graficamente a função *A(x)*, onde a calculadora gráfica os auxiliou apenas nos cálculos. Verifica-se uma procura superior em termos de rigor nas escalas nos grupos A e C, e em termos do desenho da parábola nos grupos B e C. Foi pedido um comentário sobre a representação gráfica obtida e os grupos A e B referiram que "É uma função quadrática", tendo o grupo C referido que "É uma parábola". A terminologia não se revelou um problema nesta fase. As primeiras representações gráficas apresentadas pelos grupos pode observar-se nas figuras seguintes.

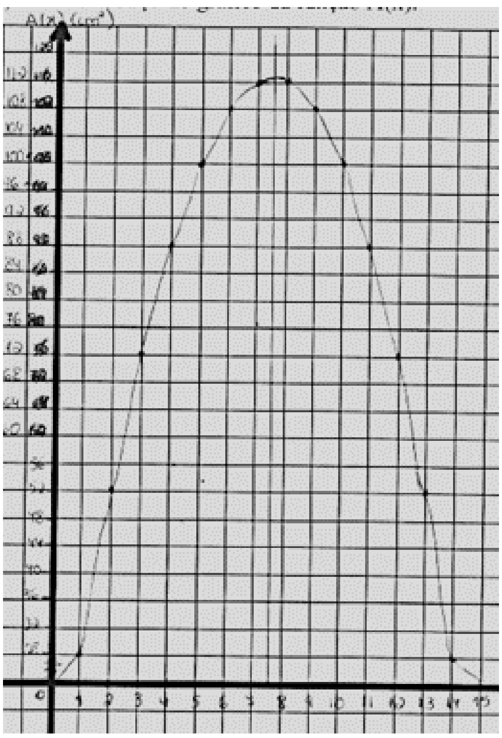


Figura 58 – Q2.c), F8, grupo A

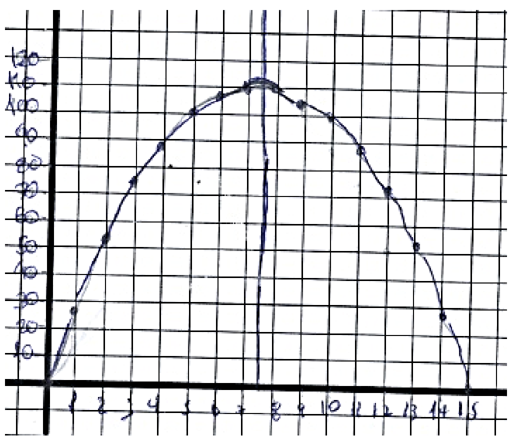


Figura 59 – Q2.c), F8, grupo B

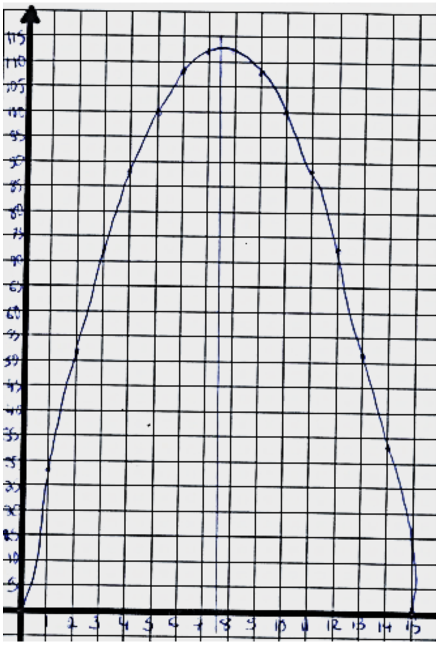


Figura 60 – Q2.c), F8, grupo C

Na construção de gráficos são várias as dificuldades que os alunos podem enfrentar. Nesta fase inicial do estudo da função quadrática foram verificadas dificuldades relacionadas com a construção de escalas não uniformes para a representação de escalas uniformes e ainda alguma hesitação na escolha nem sempre correta das unidades. A representação gráfica de funções quadráticas foi uma constante no decorrer da unidade de ensino e a calculadora gráfica auxiliou a conversão entre a representação algébrica e gráfica. Na ficha 9, partindo de uma representação algébrica, é a observação, a interpretação de representações gráficas e algébricas de uma função quadrática, bem como as conexões entre diferentes representações que possibilitam a expressão das ideias matemáticas exigidas.

Verificou-se que o contexto em que é solicitada a representação gráfica de uma função quadrática pode influenciar o maior ou menor rigor da mesma. Por exemplo, quando se trata de uma questão em que se pede exclusivamente para apresentar a representação gráfica de uma função (Figuras 58, 59 e 60, por exemplo) os alunos esforçam-se por apresentar com rigor o solicitado. No entanto, quando a mesma surge como auxílio na resposta a uma questão mais abrangente tal já não se verifica, embora os pontos relevantes, a concavidade voltada corretamente e, no fundo, um razoável esboço sejam representados. Tal aconteceu na questão 4. da ficha 9, onde se investiga se é possível o guarda-redes alcançar a bola, caso ele se encontrasse debaixo da mesma quando ela atinge a altura máxima. Nesta situação, apenas os grupos A e B representam graficamente a função (Figuras 61 e 62).

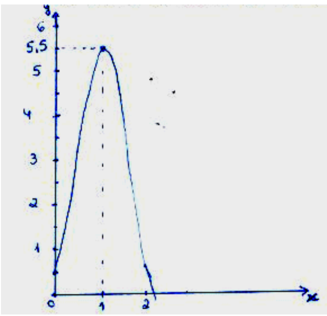


Figura 61 – Q4., F9, grupo A

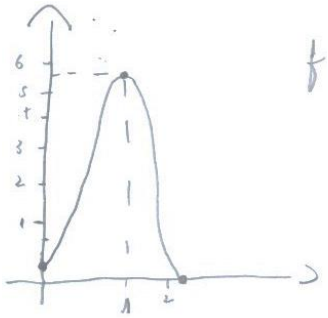


Figura 62 – Q4., F9, grupo B

Na ficha 11 voltou a verificar-se rigor nas representações gráficas das funções nos grupos A e B. Foi solicitado que os alunos representassem graficamente a função que relaciona a altura de uma bola com o decorrer do tempo, depois de a mesma ter sido lançada. Os grupos A e B apresentam no referencial as abcissas e ordenadas relevantes, representando a função apenas no seu domínio de existência (Figuras 63 e 64). O grupo C representa apenas um esboço pouco rigoroso e desajustado à situação, com a abcissa do vértice mal marcada, sem qualquer menção a abcissas e coordenadas relevantes e ainda fora do seu domínio de existência e, portanto, desajustado do contexto real apresentado (Figura 65). O grupo C apresenta ainda no mesmo referencial a função que representa a velocidade da mesma bola em função do tempo. Os grupos A e B representaram essa função afim noutro referencial.

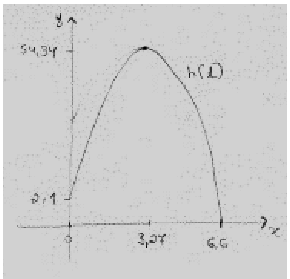


Figura 63 – Q1.1., F11, grupo A

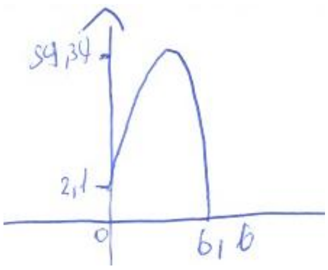


Figura 64 – Q1.1., F11, grupo B

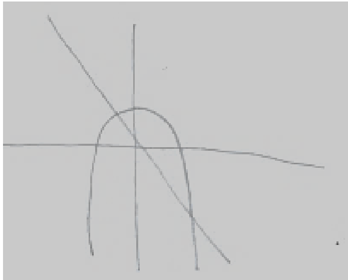


Figura 65 – Q1.1., F11, grupo C

A conversão de determinadas representações para a representação gráfica exige, perante situações contextualizadas, uma especial atenção ao domínio e ao contradomínio e, nessas situações, a representação gráfica da função em IR raramente é a correta. São exemplos as situações contextualizadas, onde a variável independente representa, por exemplo, o tempo e a variável dependente a altura de um objeto relativamente ao solo ou a sua velocidade. Este aspeto foi melhorando ao longo da unidade de ensino e verificou-se que no fim da mesma os grupos já representavam corretamente as funções quadráticas nos respetivos domínios (Figura 66 e 67).

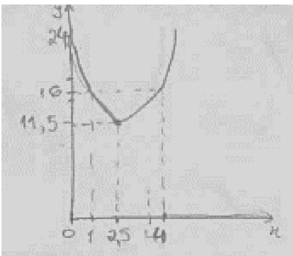


Figura 66 – Q1.2., F12, grupo A

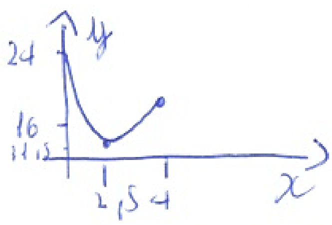


Figura 67 – Q1.2., F12, grupo B

Na questão 2. da ficha 11, depois da análise do gráfico de uma função quadrática, os alunos têm de converter a sua representação gráfica em algébrica. As coordenadas do vértice da parábola são identificadas graficamente e a escrita da expressão analítica da função quadrática mediante o conhecimento das coordenadas do vértice da função são os recursos usados pelos grupos, que conseguem realizar com sucesso a conversão pedida (Figura 68, 69 e 70).

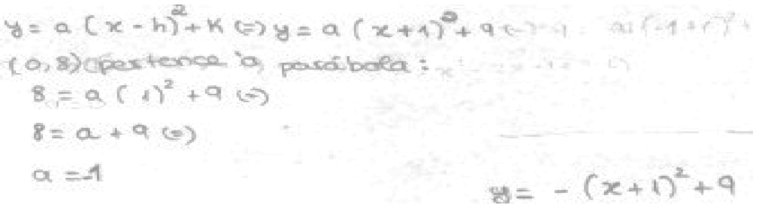


Figura 68 – Q1.2., F11, grupo A

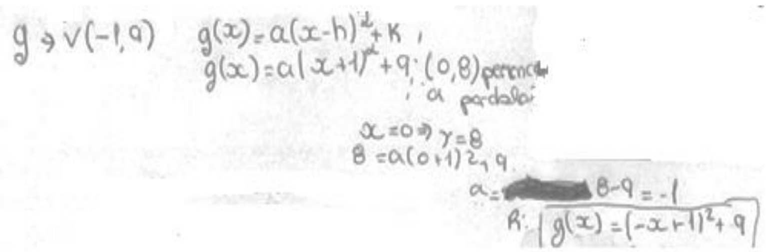


Figura 69 – Q1.2., F11, grupo B

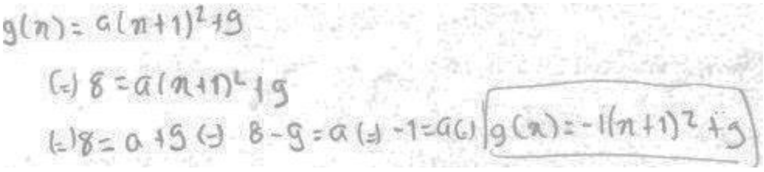
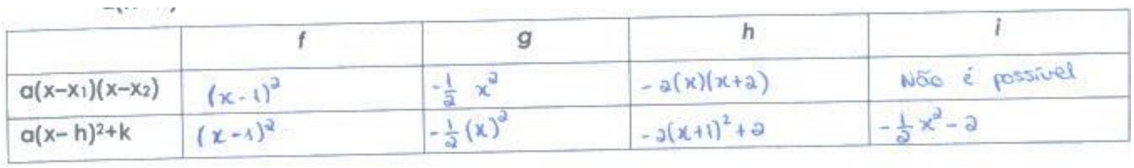


Figura 70 – Q1.2., F11, grupo C

A conversão entre a representação analítica e a gráfica envolve processos diferentes daqueles usados na conversão recíproca. A acrescentar ainda temos o papel facilitador que a calculadora assume nesta última conversão.

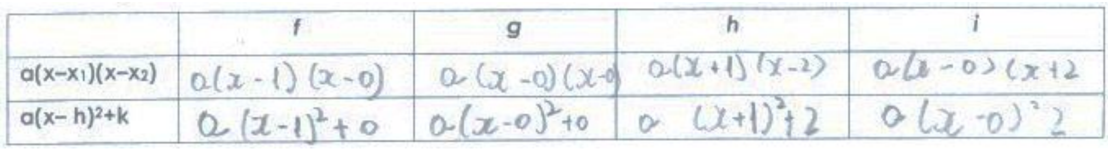
A ficha 10 trabalha com especial detalhe um aspeto importante nas transformações de representações semióticas, fundamentais para o desenvolvimento do conceito de função que são os tratamentos (Duval, 2006). Estes possibilitaram aos alunos efetuar transformações dentro do mesmo registo, neste caso, dentro da representação algébrica. Efetuando tratamentos desta ordem, os alunos conseguem escrever as expressões algébricas de funções quadráticas de diferentes formas: forma canónica, $f(x)=ax^2+bx+c$; com base no conhecimento das coordenadas do seu vértice (h, k) , $f(x)=a(x-h)^2+k$; com base no conhecimento dos seus zeros reais x_1 e x_2 (caso existam), $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Na ficha 10 as funções são apresentadas de forma algébrica, na sua forma canónica: $f(x)=ax^2+bx+c$. Depois de exploradas várias propriedades de cada uma das funções representadas, entre as quais os zeros, as coordenadas do vértice, a equação do eixo de simetria e o esboço, os alunos escrevem as expressões analíticas das mesmas sem recorrer à forma canónica. Verifica-se que os três grupos seguem um raciocínio semelhante, sendo que apenas o grupo B (Figura 72) tem dificuldade na determinação do valor de *a*, não reconhecendo que esse tem de ser o mesmo que surge expressão na forma canónica. O grupo C (Figura 73) apresenta o valor de *a* de acordo com o pretendido mas na função *g* não se consegue percebe que valor é escrito por eles (parece ser um parenteses que ficou por fechar, depreendendo-se que o valor de *a* ficou por escrever).



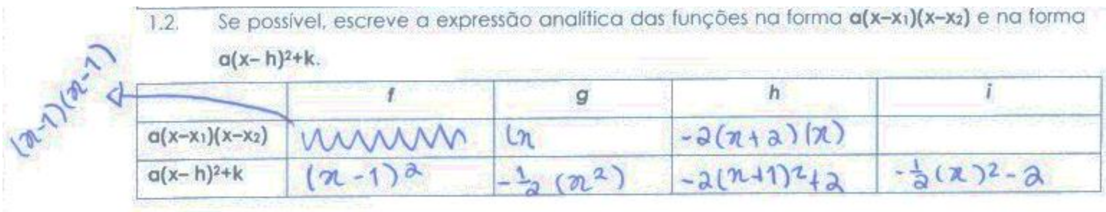
	f	*g*	*h*	*i*
$a(x-x_1)(x-x_2)$	$(x-1)^2$	$-\frac{1}{2}x^2$	$-2(x)(x+2)$	Não é possível
$a(x-h)^2+k$	$(x-1)^2$	$-\frac{1}{2}(x)^2$	$-2(x+1)^2+2$	$-\frac{1}{2}x^2-2$

Figura 71 – Q1.2., F10, grupo A



	f	*g*	*h*	*i*
$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-1)(x-0)$	$a(x-0)(x-0$	$a(x+1)(x-2)$	$a(x-0)(x+2$
$a(x-h)^2+k$	$a(x-1)^2+0$	$a(x-0)^2+0$	$a\ (x+1)^2+2$	$a\ (x-0)^2\ 2$

Figura 72 – Q1.2., F10, grupo B



1.2. Se possível, escreve a expressão analítica das funções na forma **$a(x-x_1)(x-x_2)$** e na forma **$a(x-h)^2+k$**.

$(x-1)(x-1)$

	f	*g*	*h*	*i*
$a(x-x_1)(x-x_2)$		$(x$	$-2(x+2)(x)$	
$a(x-h)^2+k$	$(x-1)^2$	$-\frac{1}{2}(x^2)$	$-2(x+1)^2+2$	$-\frac{1}{2}(x)^2-2$

Figura 73 – Q1.2., F10, grupo C

A função *i* não tem zeros, pelo que não é possível escrever a sua expressão analítica na forma $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. Apenas os grupos A e C evidenciam esse reconhecimento nas suas respostas. O grupo B, tendo calculado erradamente os zeros da função, acaba por apresentar incorretamente a escrita da função nessa forma (Figura 73). Portanto, os erros do grupo B devem-se a cálculos anteriores ou até, aparentemente, a pequenas distrações, como no caso da escrita algébrica da função *h* com base no conhecimento dos seus zeros. Apesar do grupo ter identificado, na questão 1.1.1., um zero corretamente (o número zero) esse acaba por não ser evidenciado quando se pede que seja escrita a expressão analítica da função na questão 1.2. A resposta do grupo sugere que o mesmo, momentos mais tarde, identificou como zeros o -1 e o 2. Talvez o grupo aqui tenha confundido os zeros com as coordenadas do vértice da parábola que representa a função.

Pode concluir-se que a conversão entre representações dentro do mesmo registo foi, no geral, realizada com sucesso. O grupo B apresentou algumas lacunas que foram sendo limadas ao longo da unidade de ensino.

Propriedades da função quadrática

Verifica-se que, numa fase inicial, o estudo da função quadrática e das suas propriedades, perante uma representação gráfica, surgiu natural e facilmente com a identificação de zeros, extremos, vértices ou ainda o estudo intuitivo da injetividade. O grupo A quando produz um comentário à primeira representação gráfica de uma função deste tipo, para além de ter identificado corretamente a função como sendo quadrática acrescentou ainda informações relativamente à injetividade, extremos e vértices (Figura 74).

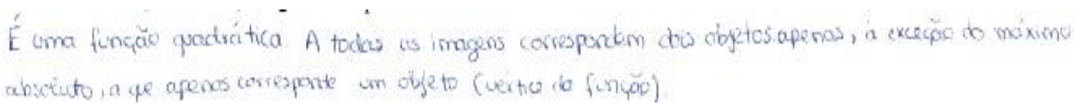

É uma função quadrática. A todas as imagens correspondem dois objetos apenas, à exceção do máximo absoluto, a que apenas corresponde um objeto (vértice da função)

Figura 74 – Q2.d), F8, grupo A

A identificação do domínio e a determinação do contradomínio das funções quadráticas foi sendo desenvolvido ao longo da unidade de ensino e verificou-se, como era de esperar, que perante representações gráficas foram sentidas menos dificuldades nesses aspetos por parte dos alunos. Na questão 2.e) da ficha 8 foi pedido que os alunos indicassem os zeros, o máximo, o mínimo e o contradomínio da função $A(x)$. Os três grupos responderam corretamente às três primeiras questões, mas apenas o grupo A especificou o contradomínio (Figura 75). A representação gráfica conduziu à determinação do máximo pela identificação inicial do seu maximizante ($x=7{,}5$). Depois de determinado o maximizante, os alunos determinaram o máximo por substituição na expressão algébrica da função. Os grupos especificam na sua resposta este processo.

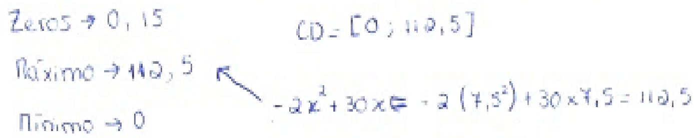


Figura 75 – Q2.e), F8, grupo A

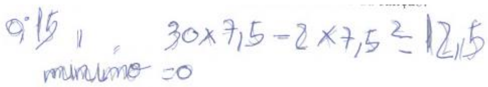


Figura 76 – Q2.e), F8, grupo B

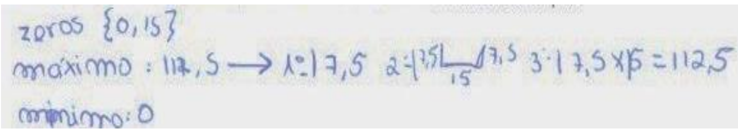


Figura 77 – Q2.e), F8, grupo C

Ao longo da unidade de ensino verificou-se uma evolução relativamente a estes conceitos. Propriedades das funções quadráticas que modelam situações reais passaram a ser melhor estudadas, nomeadamente no que diz respeito à correta identificação do domínio e a determinação do contradomínio de funções apresentadas com contexto real. Por exemplo, na questão 1.3. da ficha 11 o grupo B já identificou corretamente o domínio e determinou corretamente o contradomínio da função quadrática (bem como o da função afim presente também na situação contextualizada).

Relativamente à equação do eixo de simetria do gráfico da função e à sua representação no gráfico todos os grupos responderam com sucesso e, ao longo da unidade de ensino, esse aspeto foi de fácil resolução, mesmo quando era necessário recorrer a cálculos mais elaborados, como a determinação do zeros, do ponto médio dos mesmos e da respetiva imagem, por exemplo. Na ficha 10 foi possível verificar a facilidade com que os alunos identificavam a equação do eixo de simetria para diferentes situações: perante um único zero x_{o}, o eixo de simetria é $x=x_o$; perante dois zeros, o eixo de simetria é escrito à custa do ponto médio dos dois; perante uma função quadrática sem zeros, o eixo de simetria está relacionado com a abcissa do vértice da parábola (tal como acontece nas outras duas situações, mas sendo um recurso mais usado pelos alunos nesta última).

A determinação das coordenadas do vértice da parábola que representa uma função quadrática está relacionada com a determinação dos extremos e extremantes da mesma. Tal aspeto foi trabalhado e não mereceu dificuldade ao longo da unidade de ensino e a sua determinação envolveu ou a determinação dos zeros, do seu ponto médio e sua respetiva imagem ou ainda a aplicação direta da fórmula das coordenadas do vértice que dai advém.

A determinação analítica dos zeros de uma função quadrática pode exigir o conhecimento da fórmula resolvente, introduzida no 9.º ano de escolaridade. Todos os grupos já a conheciam e demonstraram facilidade na sua aplicação. A determinação analítica de objetos com determinada imagem diferente de zero também não ofereceu grandes dificuldades por exigir precisamente o referido anteriormente. A interpretação dos enunciados, nomeadamente perante situações contextualizadas, foi muito trabalhada aquando da exploração dos conceitos relacionados com a determinação de objetos a partir das imagens.

Relativamente à determinação dos zeros, na ficha 9 os grupos identificaram facilmente que a bola chegava ao solo precisamente no instante positivo que tinha imagem nula e, portanto, os zeros da função foram calculados e a resposta dada de acordo com o contexto do problema. Assim, os alunos descobrem quanto tempo decorreu desde que a bola foi pontapeada até que a mesma atingiu o solo Verifica-se, no entanto, que o grupo A foi o que apresentou mais rigor na sua resposta uma vez que efetuou corretamente todos os cálculos intermédios conducentes à resposta, tendo no final apresentado os dois valores possíveis e eliminado o que não fazia sentido no contexto do problema (Figura 78). Já o grupo B, apesar de ter efetuado exatamente o mesmo raciocínio do grupo A, não o apresenta de forma detalhada na sua resposta, pressupondo-se que efetuou grande parte dos cálculos na calculadora (Figura 79). De facto, como é pedido no enunciado, os alunos têm de apresentar os cálculos arredondados às centésimas e dado que aparece um número irracional nos cálculos intermédios, é óbvio o papel auxiliar que a calculadora tem nesta questão. Verifica-se que o grupo C, apesar de reconhecer o instante positivo como aquele que contextualiza a situação, não consegue chegar ao valor pretendido devido a um grave erro de cálculo: o grupo “corta” no numerador e no denominador o valor “-10”, efetuando assim erradamente a divisão do numerador e do denominador por -10 (Figura 80).

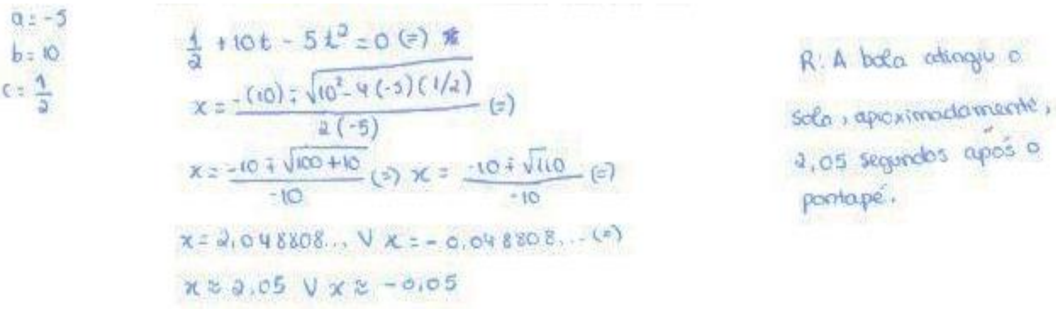
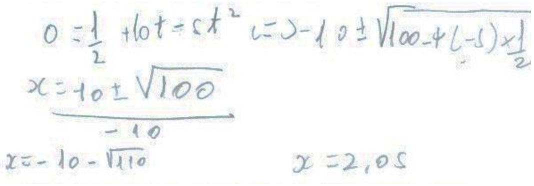


Figura 78 – Q3., F9, grupo A



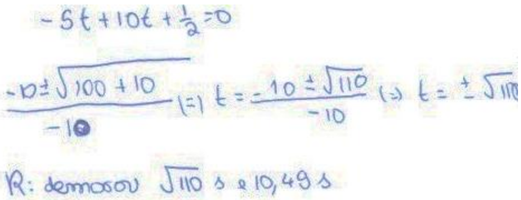


Figura 79 – Q3., F9, grupo B **Figura 80 – Q3., F9, grupo C**

Na questão 1.1.1. da ficha 10 é possível verificar que os grupos A e C encontraram corretamente os zeros de todas as funções, apresentando as justificações necessárias (Figuras 81 e 83). O grupo B não resolve a questão para função *f*, encontra erradamente dois zeros para a função *i*, pois comete um erro de cálculo na resolução da equação, e não conclui os cálculos para a função *h*, identificando apenas um zero (Figura 82). Ainda na função *i*, o grupo C omite o sinal negativo do 4, talvez por lapso uma vez que conclui corretamente a resposta (Figura 83).

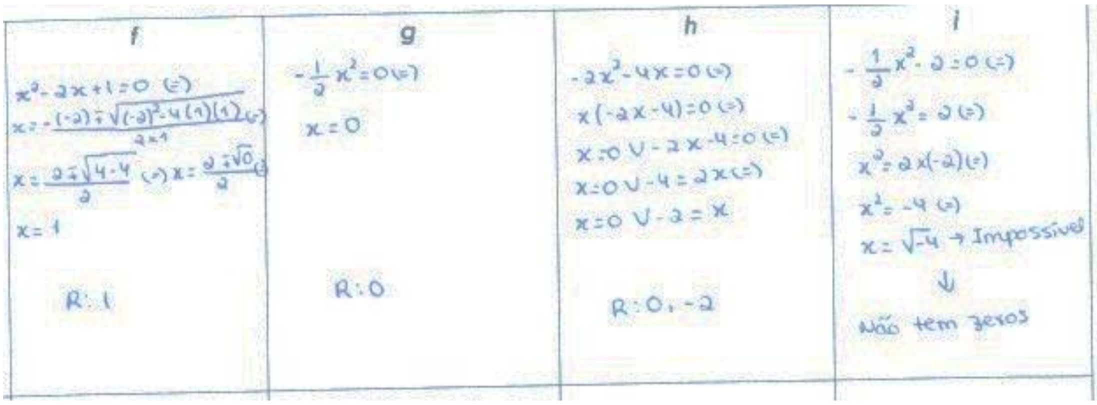
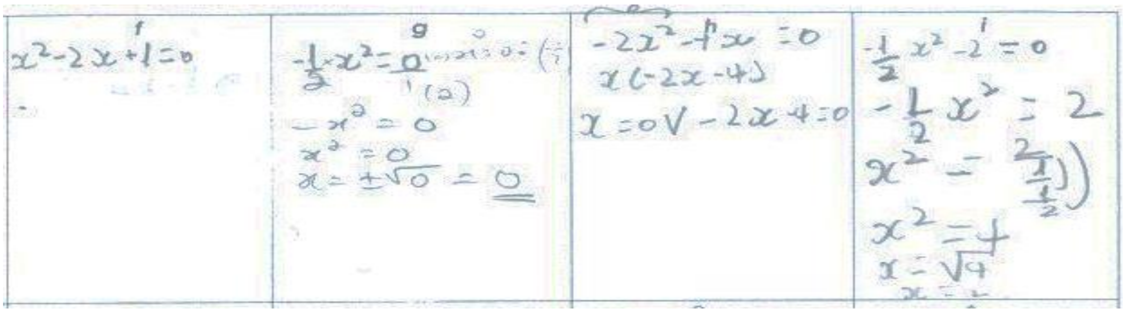
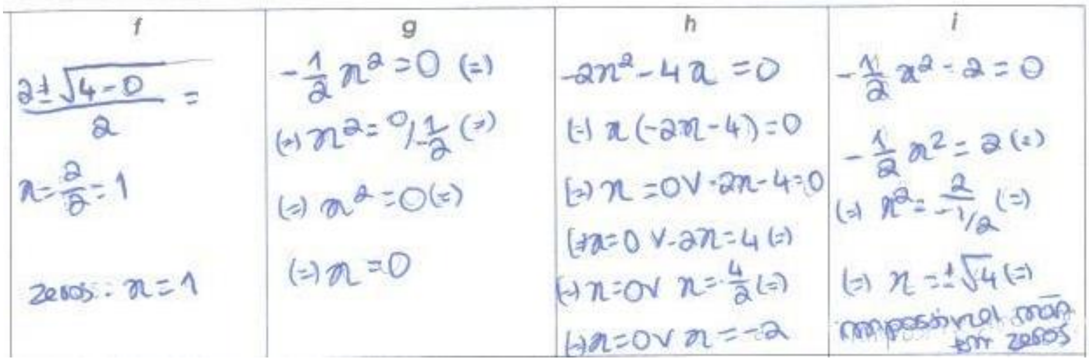


Figura 81 – Q1.1.1., F10, grupo A



f	g	h	i
$x^2-2x+1=0$	$-\frac{1}{2}x^2=0$	$-2x^2-4x=0$	$-\frac{1}{2}x^2-2=0$
	$-x^2=0$	$x(-2x-4)$	$-\frac{1}{2}x^2=2$
	$x^2=0$	$x=0 \vee -2x-4=0$	$x^2=-\frac{2}{\frac{1}{2}}$
	$x=\pm\sqrt{0}=0$		$x^2=4$
			$x=\sqrt{4}$

Figura 82 – Q1.1.1., F10, grupo B



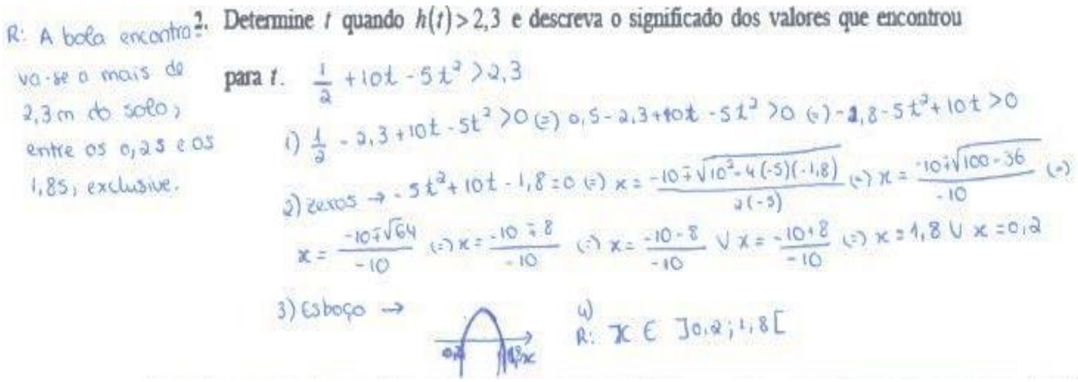
f	g	h	i
$\frac{2\pm\sqrt{4-0}}{2}=$	$-\frac{1}{2}x^2=0$ (⇔)	$-2x^2-4x=0$	$-\frac{1}{2}x^2-2=0$
$x=\frac{2}{2}=1$	(⇔) $x^2=0/-\frac{1}{2}$ (⇔)	(⇔) $x(-2x-4)=0$	$-\frac{1}{2}x^2=2$ (⇔)
zeros: $x=1$	(⇔) $x^2=0$ (⇔)	(⇔) $x=0 \vee -2x-4=0$	(⇔) $x^2=\frac{2}{-1/2}$ (⇔)
	(⇔) $x=0$	(⇔) $x=0 \vee -2x=4$ (⇔)	(⇔) $x=\pm\sqrt{4}$ (⇔)
		(⇔) $x=0 \vee x=\frac{4}{-2}$ (⇔)	impossível, não tem zeros
		(⇔) $x=0 \vee x=-2$	

Figura 83 – Q1.1.1., F10, grupo C

Relativamente à determinação de objetos com determinadas imagens (para além dos zeros da função quadrática), conceitos e procedimentos novos foram introduzidos, nomeadamente a resolução de inequações de 2.º grau. Foram abordadas situações de determinação de objetos que têm determinada imagem, onde a resolução de equações de 2.º grau é suficiente e outras onde a determinação de objetos, cujas imagens pertencem a um determinado intervalo de números reais, exige a resolução de inequações de 2.º grau. Foi possível verificar evoluções nos vários grupos.

Na ficha 9, analisando um contexto semirreal, os alunos identificam que o modelo matemático escrito no enunciado ilustra a situação apresentada: *h(t)* representa a altura da bola (em metros) relativamente ao solo, sendo *t* o tempo decorrido (em segundos). Quando questionados sobre o significado de "*h(0)=1/2*", os três grupos estabeleceram corretamente a correspondência entre o significado matemático e o real, referindo que a bola se encontrava a meio metro do solo quando o jogador a pontapeou (no instante inicial).

Na segunda questão, os alunos devem determinar *t* quando "*$h(t)$>2,3*", ou seja, espera-se que seja resolvida a correspondente inequação de segundo grau e descrito o significado dos valores encontrados para *t*. A determinação analítica dos valores de *t* que verificam a condição $h(t)=2{,}3$ conduz-nos a dois valores reais e a questão pode ser respondida por observação da representação gráfica da função *h*.



R: A bola encontrava-se a mais de 2,3 m do solo, entre os 0,25 e os 1,85, exclusive.

2. Determine t quando $h(t)>2{,}3$ e descreva o significado dos valores que encontrou para t.

$\frac{1}{2}+10t-5t^2>2{,}3$

1) $\frac{1}{2}-2{,}3+10t-5t^2>0 \Leftrightarrow 0{,}5-2{,}3+10t-5t^2>0 \Leftrightarrow -1{,}8-5t^2+10t>0$

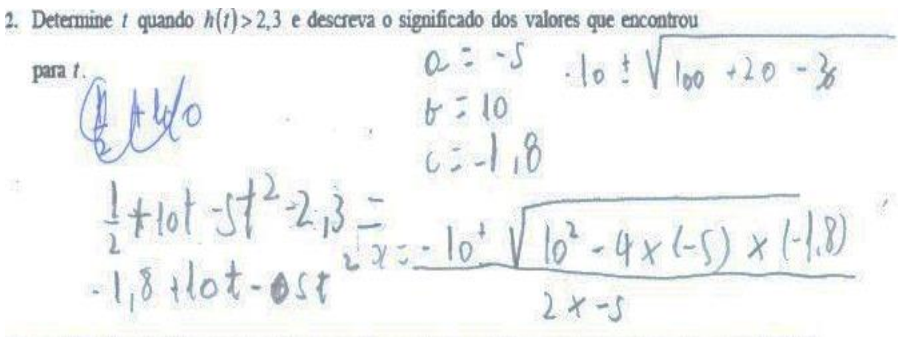
2) zeros $\rightarrow -5t^2+10t-1{,}8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-10\mp\sqrt{10^2-4(-5)(-1{,}8)}}{2(-5)} \Leftrightarrow x=\frac{-10\mp\sqrt{100-36}}{-10} \Leftrightarrow$

$x=\frac{-10\mp\sqrt{64}}{-10} \Leftrightarrow x=\frac{-10\mp 8}{-10} \Leftrightarrow x=\frac{-10-8}{-10} \vee x=\frac{-10+8}{-10} \Leftrightarrow x=1{,}8 \vee x=0{,}2$

3) Esboço $\rightarrow$

4) R: $x\in\,]0{,}2;1{,}8[$

Figura 84 – Q2., F9, grupo A



2. Determine t quando $h(t)>2{,}3$ e descreva o significado dos valores que encontrou para t.

$a=-5$ $\quad -10\pm\sqrt{100+20-36}$

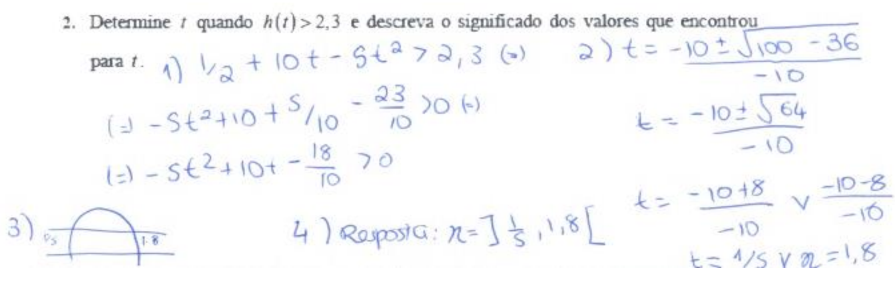
$b=10$

$c=-1{,}8$

$\frac{1}{2}+10t-5t^2-2{,}3=$

$-1{,}8+10t-5t^2$ $\quad x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times(-5)\times(-1{,}8)}}{2\times-5}$

Figura 85 – Q2., F9, grupo B



2. Determine t quando $h(t)>2{,}3$ e descreva o significado dos valores que encontrou para t.

1) $1/2+10t-5t^2>2{,}3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5t^2+10t+5/10-\frac{23}{10}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5t^2+10t-\frac{18}{10}>0$

2) $t=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{-10}$

$t=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{-10}$

$t=\frac{-10+8}{-10} \vee \frac{-10-8}{-10}$

$t=1/5 \vee x=1{,}8$

3)

4) Reposta: $x=\,]\frac{1}{5},1{,}8[$

Figura 86 – Q2., F9, grupo C

Apenas os grupos A e C encontraram o intervalo de tempo pretendido (Figura 84 e 85), reconhecendo assim o seguinte: 0,2 segundos depois de pontapeada, a bola encontrava-se a 2,3 metros do solo, em subida; 1,8 segundos depois de lançada, a mesma encontrava-se a uma altura de 2,3 metros do solo, em descida. O grupo B, não tendo conseguido determinar os valores para os quais a bola se encontra a 2,3 metros de altura (não resolveu a equação de 2.º grau correspondente), não conseguiu responder ao solicitado (Figura 85).

As dificuldades iniciais na resolução de inequações de 2.º grau permaneceram no grupo B e, ainda na ficha 12, o grupo não foi capaz de determinar os valores de *x* para os quais a área da figura representada era superior ou igual a 11,5. Limitou-se a encontrar um único valor que satisfaz o pedido (Figura 87) enquanto os outros grupos resolveram a questão corretamente (Figura 88).

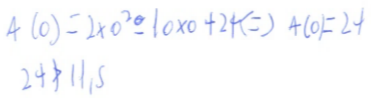


Figura 87 – Q1.2., F12, grupo B

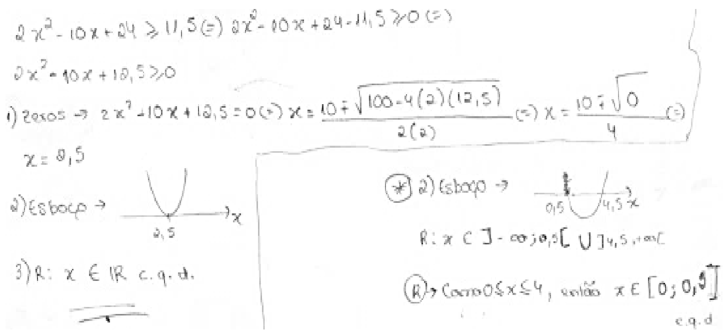


Figura 88 – Q1.2., F12, grupo A

Relativamente à determinação de objetos que satisfazem determinadas condições que envolvam funções quadráticas (como por exemplo objetos que têm imagens superiores/inferiores por meio de *f* do que por meio de *g*) a resolução de inequações de 2.º grau impera novamente. Na questão 2.2.1. da ficha 11 os alunos têm que determinar os valores de *x* para os quais as imagens por meio de *g* são superiores às imagens por meio de *f*, onde *f* é uma função afim e *g* uma função quadrática. A questão 2.2.2. pedia o contrário da 2.2.1.: determinar os valores de *x* para os quais as imagens por meio de *g* são inferiores ou iguais às imagens por meio de *f*.

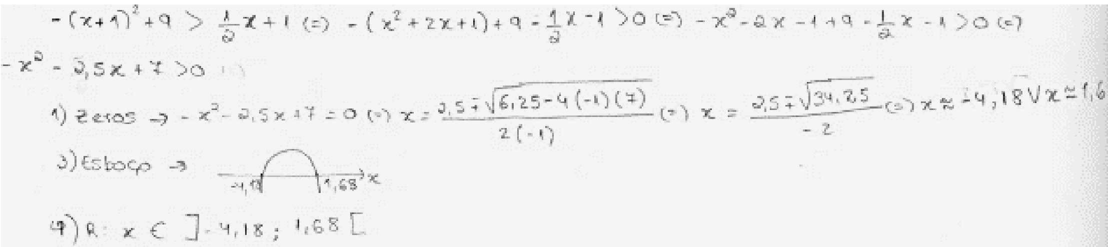


Figura 89 – Q2.2.2., F11, grupo A

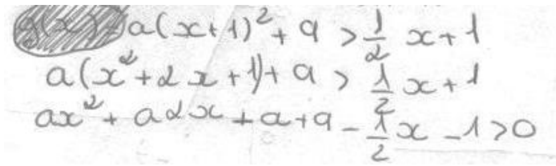


Figura 90 – Q2.2.2., F11, grupo B

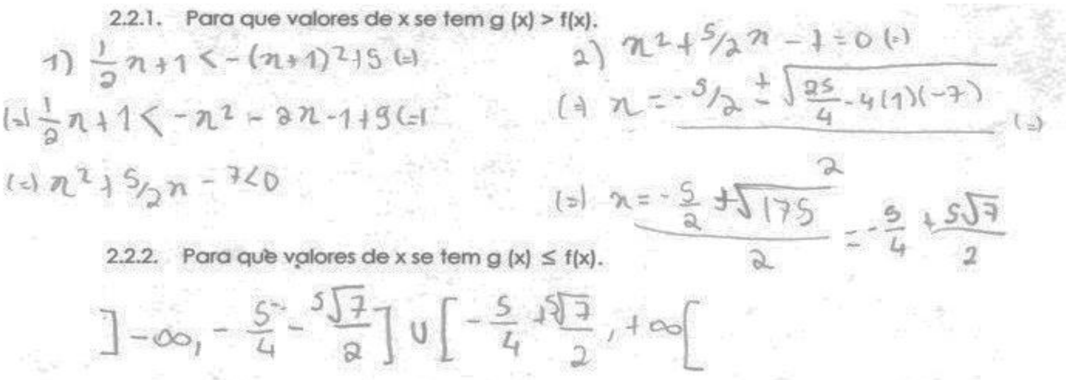


Figura 91 – Q2.2.2., F11, grupo C

O grupo A resolve corretamente a questão começando por escrever a inequação correspondente, seguindo depois os passos conducentes à resposta e fundamentais na resolução de inequações de 2.º grau (Figura 89). O mesmo fez o grupo C não tendo, no entanto, formalizado a resposta para a questão 2.2.1., mas sim para a questão 2.2.2. Pressupõem-se assim que por esquecimento a questão 2.2.1. não foi respondida, mas "resolvida" (Figura 91). Dos três grupos, o C foi o único que percebeu que na resposta à questão 2.2.2. deveria ser escrito o conjunto contrário ao que conjunto solução relativo à questão 2.2.1. O grupo A resolveu corretamente a questão 2.2.2. como se de uma completa novidade se tratasse, não a relacionando com a questão 2.2.1. O grupo B deixou a questão 2.2.2. em branco e não conseguiu resolver corretamente a 2.2.1. pois escreveu a expressão analítica da função quadrática sem colocar o valor de *a* encontrado na alínea anterior (Figura 90). De notar mais uma vez a manipulação dentro do mesmo registo que a resolução das questões mencionadas exige. Estando a trabalhar com representações algébricas, os alunos têm de efetuar variados "tratamentos" (Duval, 2006) nas mesmas para conseguirem alcançar os resultados. Os grupos A e C continuam a ser os que têm mais facilidade neste aspeto.

Em **síntese**, apresentam-se de seguida dois quadros relativos às dificuldades de conversão entre representações de funções quadráticas mais significativas.

Representação final / Representação inicial	Verbal	Gráfica	Algébrica	Numérica
Verbal				
Gráfica			x	
Algébrica		x	x	
Numérica				

Quadro 7 – Dificuldades de conversão entre representações de funções quadráticas

Grupos / Propriedades	A	B	C
Domínio		x	x
Contradomínio		x	x
Zeros		x	
Objetos e imagens		x	x

Quadro 8 – Dificuldades no estudo de algumas propriedades da função quadrática

Note-se que as dificuldades apontadas relativamente ao contradomínio são dificuldades iniciais que foram sendo minimizadas com o decorrer da unidade de ensino. O mesmo se passa com as dificuldades relacionadas com o domínio e a conversão entre as representações algébricas e gráficas, tendo estas a ver principalmente com o rigor apresentado no desenho do gráfico, na correta utilização das escalas, na referência das coordenadas dos pontos relevantes e na representação gráfica apenas no domínio de existência da função. Já as dificuldades apontadas na conversão dentro da representação algébrica estão relacionadas com as dificuldades que os alunos manifestaram nos tratamentos (Duval, 2006) que possibilitam a escrita da expressão analítica da função quadrática de variadas formas. Esta última dificuldade foi mais evidenciada pelo grupo B.

6. Conclusões

> “Embora seja possível definir função de forma muito geral, privilegiando a perspetiva da Álgebra na Matemática escolar, a verdade é que as funções numéricas gozam de propriedades elementares particularmente interessantes, têm uma representação numérica simples e intuitiva, e descrevem de uma forma muito sugestiva situações da mais diversa natureza.” (Ponte, 1990, p.8)

Neste capítulo final será realizada, numa primeira parte, uma síntese dos resultados da intervenção letiva e sua interpretação, em relação aos objetivos estabelecidos inicialmente. Procurarei dar evidência do nível de concretização alcançado com o desenvolvimento da unidade de ensino. Numa segunda parte, farei um balanço reflexivo sobre todo o trabalho realizado, evidenciando algumas contribuições associadas aos resultados obtidos bem como algumas implicações do trabalho desenvolvido para a minha prática profissional como investigadora e professora.

A problemática do estudo consiste em estudar a evolução da compreensão, por parte dos alunos, do conceito de função ao longo da unidade didática “Funções I”, no 10.º ano (Matemática A). Recordemos as questões de investigação do estudo:

1. Quais as dificuldades iniciais que os alunos revelam na compreensão do conceito de função?
2. Que compreensão os alunos revelam das propriedades de determinados tipos de funções (afim, quadrática e definida por ramos)?
3. Que conexões os alunos estabelecem entre as várias representações de determinados tipos de funções (afim, quadrática e definida por ramos)?
4. De que forma é que uma unidade de ensino que promove as conexões entre diferentes representações contribui para a compreensão do conceito de função pelos alunos?

6.1. Conclusões do estudo

6.1.1. Dificuldades iniciais na aprendizagem das funções

A complexidade inerente ao conceito de função culmina num conjunto vasto de dificuldades aquando da sua aprendizagem por parte dos alunos (Akkus, Hand & Seymur, 2008). Ao longo da unidade de ensino foi possível identificar algumas dificuldades na aprendizagem das funções e verificar a sua evolução em termos de permanência, redução ou desaparecimento. Serão de seguida primeiramente focadas as dificuldades iniciais dos alunos na aprendizagem das funções.

Na fase inicial do estudo (durante as primeiras duas semanas do projeto) os três grupos apresentaram desenvolvimentos diferentes quanto ao conceito de função. Estes manifestaram facilidade em reconhecer as seguintes correspondências como funções: a função linear, a função de proporcionalidade direta, a função afim, a função de proporcionalidade inversa, a função quadrática e a função definida por ramos "em escada". O reconhecimento destas funções foi verificado nas suas diferentes representações. Numa fase inicial, as representações verbais e numéricas não ofereceram dificuldades e foi nas representações gráfica e algébrica que elas mais se manifestaram. O grupo B foi o único que teve dificuldade em identificar se uma determinada expressão algébrica é ou não uma função, revelando dificuldades iniciais na representação algébrica de diferentes tipos de funções. Os grupos A e C manifestaram dificuldades na representação algébrica apenas para a função quadrática. Este tipo de função também gerou dificuldades na sua representação gráfica, tendo sido apenas o grupo C a evidenciar sucesso na conversão de uma representação algébrica para gráfica de uma função quadrática. Os grupos A e B não conseguiram, numa fase inicial, representar graficamente uma função quadrática.

Relativamente ao estudo de propriedades de funções, na fase inicial as dificuldades mais destacadas foram as seguintes: identificação de domínios, determinação de contradomínio, leitura de objetos/imagens no gráfico (principalmente relacionada com o "código das bolinhas abertas e fechadas" ou com infinidade de objetos com a mesma imagem e vice-versa). Estas dificuldades manifestaram-se principalmente no grupo B nos seguintes aspetos: identificação de domínios de funções definidas por ramos "em escada", determinação de contradomínios de funções afins e de funções definidas por ramos “em escada” e determinação de objetos e imagens em funções definidas por ramos e em funções quadráticas. As dificuldades iniciais relacionadas com o estudo de propriedades de funções identificadas nos grupos A e C estão relacionadas apenas com a determinação de objetos e imagens. O grupo C revelou esse tipo de dificuldades para os três tipos de funções e o grupo A revelou esse tipo de dificuldades apenas para as funções quadráticas e definidas por ramos.

A leitura e a interpretação de gráficos que representam funções definida por ramos foram mais difíceis no início da unidade de ensino. O grupo B foi o que mais dificuldades sentiu neste ponto e as mesmas surgiram na leitura de objetos e imagens.

As dificuldades evidenciadas nos grupos A e C foram colmatadas ao longo da unidade de ensino, enquanto o grupo B manteve-as durante mais tempo, nomeadamente na identificação de domínios.

6.1.2. Propriedades das funções e conexões entre representações

Na tentativa de responder à segunda e terceira questões do estudo apresenta-se de seguida uma análise sobre a aprendizagem que os alunos fizeram sobre as propriedades de cada tipo de função estudada, nas suas diferentes representações. Procura-se, em simultâneo, identificar que conexões os alunos estabelecem entre as várias representações das funções estudadas. As duas questões referidas serão assim tratadas em conjunto, por se considerar que a terceira poderá contribuir para a melhor compreensão da segunda.

Analisar se os alunos conseguem fazer um estudo correto das três funções abordadas permite averiguar se estes desenvolveram adequadamente o conceito de função. No entanto, averiguar se os alunos conseguem trabalhar com as diferentes representações de uma mesma função não é suficiente para concluir que possuem uma boa compreensão do conceito de função. É necessário saber se os alunos conseguem estabelecer conexões entre elas, pois só assim é possível verificar se conseguem identificar e reconhecer a invariância das propriedades de determinadas funções, nas suas várias representações (Ronda, 2015).

Neste estudo, o confronto com múltiplas representações e a promoção da conexão entre elas possibilitaram não só observar a mesma função representada de formas diferentes, mas também possibilitou que os alunos observassem a invariância das propriedades de uma mesma função quando representada de formas diferentes. O presente estudo sugere assim o que Saraiva (2010) defende: a capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações pode favorecer a compreensão profunda de um conceito.

Apresentar-se-ão de seguida algumas conclusões, baseadas em evidências empíricas do estudo realizado, relativamente ao exposto para cada uma das funções estudadas: afim, definida por ramos e quadrática.

Função afim

As principais dificuldades relacionadas com a conexão entre diferentes representações afins estão relacionadas com a conversão da representação verbal/gráfica para a algébrica. Relativamente ao estudo das propriedades da função afim aquelas em que os alunos revelaram mais dificuldade foram a determinação de contradomínios e a identificação/determinação de objetos e imagens**.** Verificou-se ser o grupo B aquele com mais dificuldades ao longo do estudo da função afim. No entanto, estas foram sendo superadas ao longo da unidade de ensino.

Aquando do estudo da função afim foi possível detetar dificuldades no estabelecimento de conexões com outros tópicos da matemática, nomeadamente a geometria. A conexão de conteúdos programáticos (geometria e funções), aparentemente distintos do ponto de vista dos alunos, é extremamente importante e fulcral neste ponto temático, onde conhecimentos previamente adquiridos são aplicados a novas situações e, no caso particular da função afim, a determinação de equações reduzidas de retas se impõe. Mais uma vez foi o grupo B que manifestou mais dificuldades neste aspeto.

Os alunos conseguiram identificar facilmente que toda a reta não vertical é a representação gráfica de uma função afim. Concluiu-se que no final da unidade de ensino, perante a representação gráfica de uma função afim os alunos conseguiram identificar domínios e determinar contradomínios e zeros tanto em situações com contexto puramente matemático ou com outros contextos.. A monotonia de uma função afim foi reconhecida graficamente mediante a observação do ângulo que a reta faz com o semieixo positivo do Ox (crescente quando a reta forma um ângulo inferior a 90 graus com o semieixo positivo *Ox* e decrescente quando a reta forma um ângulo superior a 90 graus com o semieixo positivo *Ox* ou constante quando a reta é horizontal). Por outro lado, verificou-se que perante a observação do gráfico de uma função afim foi fácil para os alunos concluírem que o acréscimo de h (número real) valores à variável independente faz corresponder sempre um acréscimo de $f(x+h)-f(x)$ valores à variável independente. Os alunos conseguiram perceber que o acréscimo aplicado à variável independente apenas depende de h e não de x. Este facto foi especialmente notado na observação de gráficos de funções afins que representavam, por exemplo, a relação entre preço a pagar em função do tempo de permanência num parque de estacionamento ou, noutra situação, em função do tempo de conversação ao telefone.

Os alunos conseguiram identificar que qualquer expressão algébrica da forma $f(x)=mx+b$, com m e b números reais, representa algebricamente uma função afim. Identificam m como sendo o declive e b como sendo a ordenada da origem. Aqui a conexão entre a representação algébrica e gráfica é nítida, onde m é o declive da reta que representa graficamente e b a ordenada do ponto que pertence a essa mesma reta e interseta o eixo *Ox* (e que, portanto, tem abcissa nula). A monotonia de uma função afim foi reconhecida algebricamente mediante a observação sinal de m. No estudo inicial da função afim o grupo B manifestou algumas dificuldades na relação entre o sinal de m e a monotonia da função afim, tendo as mesmas sido ultrapassadas ao longo da unidade de ensino.

A escrita da expressão analítica de uma função representada graficamente impõe por si só a compreensão da generalização comportamental do que o gráfico representa. O grupo B foi o que revelou dificuldades na conversão entre a representação gráfica e algébrica da função afim. No entanto, conclui-se que no fim da unidade de ensino já as haviam ultrapassado. A determinação de objetos e imagens (incluindo zeros) perante a representação algébrica é um objetivo que acabou por ser alcançado pelos três grupos. Quando é pedido, por exemplo na ficha 5, que os alunos descubram quanto teria o João ganho se tivesse vendido 145 peças, os alunos revelam compreender que algebricamente o substituir na equação x por 145 corresponde exatamente ao mesmo que, graficamente, identificar a imagem do objeto 145. Foi possível verificar que perante o estudo de funções afins que modelam situações reais ou semirreais (ficha 5, por exemplo), os alunos conseguiram entender a invariância de algumas propriedades mediante as representações gráfica e algébrica.

A representação numérica de uma função afim surgiu ao longo da unidade de ensino complementada sempre com outro tipo de representação. O mesmo aconteceu com a representação verbal. Ambas surgiram sempre em conjunto com a representação algébrica e/ou gráfica. A calculadora gráfica assume aqui um facilitador na conversão entre estas representações e no reconhecimento de algumas propriedades da função afim nas suas diferentes representações. De notar também que a representação verbal de uma função afim foi sempre abordada perante situações reais ou semirreais e, nesses casos, a interpretação do significado contextualizado (para além do geométrico) dos valores de *m* e de *b* foi também possível e conseguido por todos os grupos.

Funções definidas por ramos

As funções definidas por ramos estudadas envolvem funções polinomiais de 1.º e de 2.º grau. À semelhança das outras funções, as maiores dificuldades encontradas no estudo das funções definidas por ramos prendem-se com a conversão da representação gráfica em algébrica, manifestando-se as mesmas apenas no início do estudo da função definida por ramos. Relativamente às propriedades das funções definidas por ramos, verificou-se que a determinação de objetos e imagens também gerou alguns conflitos, nomeadamente nos pontos de transição entre ramos.

No final da unidade de ensino, os alunos revelaram facilidade em identificar e em representar graficamente funções definidas por ramos. Perante a representação gráfica de uma função definida por ramos, os três grupos mostraram conseguir identificar os diferentes comportamentos característicos da função em cada intervalo do seu domínio. Perante a representação gráfica, a identificação do domínio e a determinação do contradomínio foram bem conseguidas pelos três grupos, embora no início tenham oferecido algumas dificuldades, particularmente no grupo B. A identificação das coordenadas dos pontos de transição entre ramos ofereceu algumas dificuldades no início do estudo das funções definidas por ramos, mas a clarificação do "código das bolinhas abertas e fechadas" permitiu a interpretação correta das representações gráficas deste tipo de função por parte de todos os grupos, no final da unidade de ensino. A forma como foi proporcionada aos alunos a compreensão do conceito de função definida por ramos, vai de encontro ao que Ronda (2015) defende na medida em que: os alunos foram confrontados com todas as representações possíveis da função, partindo da mais familiar (verbal) para a mais formal; perante as mesmas foi possível verificar nas suas respostas que reconheceram a invariância de algumas propriedades da função. Quando, por exemplo na ficha 7, foi pedido que representassem a função definida por ramos numérica, verbal e algebricamente (por esta ordem) todos os alunos, identificaram, nas quatro representações, os quatro intervalos do domínio da função, inicialmente representada graficamente. As conversões desenvolvidas das representações algébricas para gráficas (ou vice-versa) de funções definidas por ramos permitiram aos alunos o reconhecimento de uma propriedade invariante característica desse tipo de função: cada intervalo do seu domínio assume um comportamento característico e distinto dos restantes. Graficamente os alunos perceberam essa propriedade pelo número de “representações” distintas que nele figuram e algebricamente pelo número de expressões analíticas que figuram na correspondente representação.

Função quadrática

A identificação de uma parábola com eixo de simetria vertical como sendo a representação gráfica de uma função quadrática foi conseguida pelos três grupos. Perante a representação gráfica de uma função quadrática, os alunos conseguiram identificar o domínio, determinar o contradomínio, eixos de simetria e ainda estudar a monotonia ou o sinal da função. No entanto, na construção de gráficos de funções são várias as dificuldades que os alunos podem enfrentar. No estudo inicial da função quadrática foram verificadas dificuldades relacionadas com a construção de escalas não uniformes para a representação de escalas uniformes e ainda alguma hesitação na escolha, nem sempre correta, das unidades. Ponte (1984) verificou que estas dificuldades podem estar relacionadas com a indecisão acerca do tipo de gráfico, com a construção de escalas não uniformes para a representação de escalas uniformes ou ainda com a hesitação ou deficiência na escolha das unidades. O autor identificou as duas últimas dificuldades apontadas em grupos de alunos com desempenho mais fraco e, de facto, foram essas as que foram identificadas neste estudo na função quadrática numa fase inicial. Perante a representação gráfica de uma função quadrática revelou-se ser fácil para os três grupos identificar o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice, assim como analisar o sentido da concavidade e estudar a monotonia e o sinal da função.

Todos os grupos identificaram corretamente $f(x)=ax^2+bx+c$ como sendo a expressão analítica de uma função quadrática (*a*, *b* e *c* reais e *a* não nulo). Aquando do estudo da função quadrática foi possível representar algebricamente a mesma função de duas formas diferentes: na forma canónica e recorrendo às coordenadas do vértice da parábola que a representa graficamente. Este tratamento dentro do mesmo registo é recomendado por Maia (2007) por favorecer a relação entre as "as variáveis visuais" e as "unidades simbólicas significativas referentes à função polinomial do 2.º grau". Ou seja, com este tipo de tratamento é possível relacionar, por exemplo, as coordenadas do vértice (representação gráfica) com os coeficientes presentes na representação algébrica da função quadrática (representação algébrica na forma canónica).

Durante a unidade de ensino foi possível verificar que os alunos apresentam mais dificuldades nas conversões do que nos tratamentos (Duval, 2006). Ainda assim, relativamente aos tratamentos, verificou-se que o grupo B apresentou algumas lacunas na manipulação algébrica referida (portanto, dentro do mesmo registo), que foram sendo limadas ao longo da unidade de ensino.

Perante a representação algébrica de uma função quadrática, a identificação do sentido da concavidade foi facilitada e todos os grupos relacionaram o sinal de *a* com o sentido da concavidade. Também no estudo da monotonia foi possível associar o sinal de *a* com os intervalos de crescimento e/ou decrescimento de determinada função quadrática.

A determinação de objetos e imagens perante representações algébricas de funções quadráticas gerou algumas dificuldades nomeadamente na resolução de inequações de 2.º grau. As dificuldades iniciais na resolução de inequações de 2.º grau permaneceram no grupo B e, ainda no fim da unidade de ensino (ficha 12), o grupo apresentou dificuldades em determinar, por exemplo, os valores de x para os quais a área da figura representada era superior ou igual a 11,5. Este grupo limitou-se a encontrar um único valor que satisfaz o pedido, enquanto os outros grupos resolveram a questão corretamente. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) apontam este aspeto como sendo comum na resolução de inequações de 2.º grau: os alunos têm tendência a apresentar como solução de inequações de 2.º grau apenas os pontos onde as funções se intersetam, não a apresentando sobre a forma de intervalo. A interpretação geométrica com apoio a situações reais pode e deve ajudar na compreensão destas questões. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) apontam ainda outro tipo de interpretação de gráficos que pode levar a interpretações gráficas na forma de pontos e que está relacionada com a dificuldade dos alunos na utilização de intervalos em comparação com pontos. Por exemplo, como se verificou no presente estudo, é comum os alunos identificarem pontos isolados como resposta a inequações da forma $f(x) \geq g(x)$, ou ainda considerarem apenas o ponto máximo desse intervalo e não o intervalo no seu todo.

De concluir também que à semelhança das outras funções, também na função quadrática se registaram mais dificuldades na conversação de diferentes representações na representação algébrica. A calculadora gráfica também se revelou um meio facilitador na conversão das diferentes representações de funções quadráticas. Relativamente às propriedades as que suscitaram mais dificuldades foram: a identificação de domínios, determinação de contradomínios e determinação de objetos e imagens.

À semelhança do que sucedeu nas outras funções, também na função quadrática a representação numérica surgiu acompanhada de outras representações nomeadamente a algébrica ou a gráfica, ou ambas. Perante a representação numérica os alunos também conseguiram determinar imagens e visualizar a simetria existente nas ordenadas dos pontos, nomeadamente quando preencheram a tabela que relacionava os valores da altura da banda lateral com a área da caleira respetiva (na ficha 8). A representação verbal duma função quadrática também surgiu sempre como complemento de outras representações e perante situações contextualizadas.

6.1.3. A unidade de ensino que promove conexões entre representações

Estando muitas vezes o conceito de função associado a uma fórmula (representação algébrica) ou a um gráfico (que representa graficamente uma expressão algébrica), importa confrontar os alunos com situações de representação verbal e/ou numérica. Na unidade de ensino o confronto constante com múltiplas representações de funções existiu no estudo dos três tipos de funções estudas: função afim, função definida por ramos e função quadrática.

Procurou-se que o estudo analítico das funções não fosse posto de parte, mas também que não se bastasse a si próprio, devendo, pelo contrário, surgir inicialmente baseados nas representações numérica e gráfica. Desta forma, é possível privilegiar o desenvolvimento de aspetos intuitivos no início do estudo de determinada função, evoluindo para aspetos de formalização para uma segunda fase (Ponte, 1990). Este aspeto foi especialmente notório aquando do estudo da função definida por ramos. Considero que a compreensão deste tipo de funções saiu facilitada pelo confronto com as diferentes representações. Foi possível verificar neste estudo, que, tal como refere Ronda (2015), o tipo de função em causa pode influenciar a forma como é realizada a conexão entre diferentes representações. Perante as três funções estudadas os alunos demonstraram diferentes graus de facilidade na conversão entre diferentes representações. Verificou-se, por exemplo, que no início da unidade de ensino quando foi pedido que os alunos representassem uma função quadrática graficamente mediante uma representação tabelar e uma representação algébrica, a mesma não foi realizada corretamente, tendo alguns grupos representado no referencial a simples união dos pontos por meio de segmentos de reta. Já na representação gráfica de funções definidas por ramos nenhum grupos evidenciou dificuldades. Considero que para este facto pode ter sido crucial a forma como foi proporcionada a compreensão da noção de função definida por ramos.

As várias representações de funções (verbal, algébrica, gráfica e tabelar/numérica) foram abordadas, nomeadamente no trabalho de modelação e na resolução de problemas. Uma dificuldade consistiu precisamente no confronto de diferentes representações e a conexão necessária de umas nas outras para a resolução das questões propostas. Foi possível verificar dificuldades no estabelecimento de relações entre as diferentes formas de representação de uma função definida por ramos, nomeadamente na conversão de representações gráficas/verbais/tabelares para a representação algébrica (Grupo B). Também foram encontradas dificuldades na conversão da representação gráfica para a representação algébrica nas funções afins e nas funções quadráticas. Os resultados evidenciaram, tal como Duval (2006) defende, que os alunos têm maior dificuldade em efetuar a conversão da representação gráfica para a algébrica, mesmo em funções relativamente familiares como as funções afins.

À semelhança dos estudos efetuados por Ronda (2015), também no presente estudo se verificou que a conversão entre a representação numérica (tabela) para a representação gráfica revelou-se mais fácil do que a conversão entre a representação gráfica para a algébrica. Aquando do estudo da função quadrática, por exemplo, foi possível verificar, já no fim da unidade de ensino, a facilidade que os alunos demonstraram na primeira conversão, comparativamente com a segunda. A conversão entre a representação algébrica e a gráfica envolve processos diferentes daqueles usados na conversão recíproca. Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) especificam com pormenor os processos envolventes de cada conversão e referem que a conversão da representação gráfica para analítica é mais difícil por envolver a deteção de padrões, enquanto a conversão entre a representação analítica para gráfica envolve uma série de passos diretos (por exemplo, definição de pares ordenados, representação dos mesmos no referencial cartesiano e união dos mesmo por uma linha).

Confirmando-se, assim, tal como Duval (2006) defende, que os tratamentos são mais acessíveis que as conexões, verificou-se, portanto, que o trabalho dentro do mesmo registo é mais fácil para os alunos. Os tratamentos são mais acessíveis que as conexões, uma vez que estas últimas exigem um reconhecimento de um mesmo objeto matemático perante diferentes representações que, aparentemente, podem não ter nada em comum. O processo de conversão exige alterações a nível de representações, o que conduz a alterações a nível dos meios de tratamento, como também a nível das propriedades que podem igualmente ser explicitadas.

Tal como Maia (2007) refere, acredito que também neste estudo, os tratamentos realizados na manipulação algébrica da expressão analítica da função quadrática contribuíram positivamente para a compreensão da correspondência entre o registro algébrico e as variáveis visuais, o que pode ter promovido uma melhor compreensão do conceito de função.

A representação gráfica de uma função quadrática permite estudar variadas propriedades da função, nomeadamente as coordenadas do vértice da parábola, o sentido da sua concavidade ou ainda a equação do seu eixo de simetria. As conexões entre a representação algébrica e gráfica, bem como as manipulações algébricas dentro do mesmo registo, possibilitaram aos alunos o reconhecimento da invariância das referidas propriedades, principalmente aquando da escrita da expressão analítica da função quadrática à custa do conhecimento das coordenadas do vértice da parábola que a representa. Na representação gráfica os alunos conseguem perceber a caraterística invariante da função quadrática relativa à simetria que a parábola acarreta. A conversão da representação algébrica e/ou gráfica na representação tabelar permite também que os alunos observem essa mesma simetria nas coordenadas dos pontos representados em tabela (na ficha 8, por exemplo).

Importante será ainda acrescentar que a calculadora gráfica assumiu um papel facilitador na conversão entre diferentes representações de funções. À semelhança de Consciência (2013), também neste estudo foi possível reconhecer que a calculadora gráfica na aprendizagem das funções "dá particular destaque à natureza dual do conceito, e à sua evolução, de uma visão operacional para uma visão estrutural, sendo esta indispensável para compreender determinadas operações e transformações de funções" (p.63). Também Kieran (2007) reconhece que a calculadora gráfica ajuda os alunos a melhorarem a sua compreensão do conceito de função e das suas propriedades. A mesma facilita o desenvolvimento do pensamento algébrico, permitindo um rápido e acessível estabelecimento de conexões entre diferentes representações (nomeadamente, entre gráficos, tabelas e expressões analíticas).

Fatores importantes para ultrapassar algumas dificuldades na aprendizagem das funções foram aplicados na unidade de ensino e estão relacionados com a importância de oferecer aos alunos a oportunidade de trabalhar com funções afins partindo das suas diferentes representações e, na resolução de problemas, desenvolver a capacidade de extrair informações relevantes e, caso seja útil, aprender a transformar essa mesma informação noutras representações mais convenientes (Ponte, 2009). O presente estudo também evidencia que são aconselhadas as conexões das funções com a geometria uma vez que possibilitam a desmistificação da álgebra como um conjunto de regras e procedimentos, possibilitando uma visão mais ampla da mesma. As conexões com a geometria revelam-se ainda fundamentais no reconhecimento da invariância de propriedades da função afim aquando da conexão entre representações de uma mesma função. Azevedo (2009) aponta ainda outros fatores facilitadores para o desenvolvimento do conceito de função e que considero terem estado presentes no estudo, a saber: a qualidade/natureza das tarefas, a natureza exploratória do ensino desenvolvido e a qualidade do ambiente geral de aprendizagem.

Relativamente à natureza das tarefas, como ponto de partida, considero que possibilitar o contacto com situações reais passíveis de serem modeladas matematicamente, revelou-se bastante positivo, possibilitando a adoção de diferentes representações para obtenção de respostas.

Foi possível verificar como as discussões e reflexões gerais das fichas de trabalho enriquecem as estratégias e a compreensão dos grupos, com especial destaque do grupo B. Este, aquando das discussões gerais e durante o trabalho a pares, ultrapassou muitas das suas dificuldades relacionadas com algumas propriedades das funções (nomeadamente, a determinação de objetos/imagens ou identificação de domínios) ou com as conversões entre diferentes representações. Relativamente, por exemplo, à determinação de objetos e imagens, verificou-se que a identificação de um conjunto infinito de objetos com determinada imagem foi difícil para os alunos, mas foi um aspeto que foi evoluindo positivamente.

Este estudo sugere, assim, que a realização de tarefas diversificadas, contextualizadas e não contextualizadas, acompanhadas de oportunidades de discussão e reflexão coletiva, características de um ensino de caráter exploratório, podem contribuir para o desenvolvimento do conceito de função por parte dos alunos.

Por outro lado, depreende-se também que os momentos de discussão geral contribuíram para o desenvolvimento das capacidades de comunicar matematicamente e de raciocinar, na justificação dos processos usados. As discussões gerais também se revelam importantes na realização de sínteses acerca dos conteúdos abordados, nomeadamente acerca das propriedades das várias funções estudadas. O professor deve dar atenção específica às estratégias evidenciadas pelos alunos e aos processos por eles evidenciados. Tal como Saraiva (2010) defende, é importante nesta fase o professor levar os alunos a notar que algumas conclusões que fazem nem sempre estão corretas, fazendo com que analisem os erros e aproveitem estas reflexões para esclarecer raciocínios, promover a clareza e o rigor nas representações e nas respostas dadas às questões. De facto, mesmo com o raciocínio correto, uma falha de interpretação do enunciado ou acrescentar dados ao enunciado que nele não constam pode fazer com que, por exemplo, os alunos escrevam uma representação algébrica que não traduz o problema. Este aspeto revelou-se importante na leitura de gráficos e na conversão da representação gráfica para algébrica, nomeadamente aquando do estudo da função afim. A necessidade da confirmação analítica das conclusões ou ilações formalizadas a partir de observações gráficas ou de interpretações de enunciados foi algo que surgiu naturalmente e que foi sendo reconhecido pelos alunos como algo fundamental em matemática, onde "a resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos" (ME, 2001b, p.28).

A linguagem simbólica revelou-se, por vezes, uma dificuldade na aprendizagem das funções. A teoria dos conjuntos e a nomenclatura nela usada impõe-se e nem sempre os alunos se mostraram à vontade com os mesmos. Carlson (1998) refere que alunos com dificuldades na compreensão da linguagem simbólica usada nas funções acabam, muitas vezes, por desenvolver dificuldades de compreensão relativamente, por exemplo, à variável dependente e independente. Considero que tais situações poderão, por exemplo, influenciar negativamente a determinação de objetos e imagens, entre outros. O papel da professora foi também extremamente importante no aperfeiçoamento das questões relacionadas com o rigor na escrita matemática, constituindo as discussões gerais momentos oportunos para o esclarecimento das mesmas. Em várias situações, nos vários grupos e no próprio grupo turma, foram sendo aperfeiçoadas as questões relacionadas com a linguagem simbólica, que foram surgindo, embora com tendência decrescente.

6.2. Reflexão final

O desenvolvimento do presente trabalho de projeto começou por ser aliciante, mostrou-se desafiante, tendo-se revelado bastante enriquecedor. A aprendizagem que o mesmo me proporcionou através do contato com a literatura, do contato com os meus alunos e com profissionais da área superou as iniciais expectativas criadas. As contribuições práticas e teóricas associadas aos resultados obtidos são prova disso mesmo e acredito poderem contribuir de sobremaneira para o desenvolvimento positivo e crescente da minha prática profissional como investigadora e professora.

Consciente de que os resultados empíricos alcançados por este estudo não podem ser generalizáveis, reconheço que a análise dos mesmos, em conjunto com a revisão de literatura, contribuíram em primeiro lugar para o meu despertar mais atento para com as questões relacionadas com o desenvolvimento do conceito de função, nomeadamente as relativas ao estudo das propriedades das funções e a todo o processo envolvido na conexão entre diferentes representações de funções.

As dificuldades encontradas no processo de aprendizagem dos alunos relativamente à compreensão do conceito de função evidenciam aspetos importantes a ter em conta enquanto docente. Os estudantes tendem a incorporar um conceito matemático primeiramente como procedimento ou processo e só mais tarde como um objeto com propriedades que pode ser manipulado e transformado. Este aspeto deve ser tido em conta na forma como se escolhe conduzir o processo de ensino aprendizagem das funções. É importante que os professores criem condições para promover a aprendizagem das funções em termos de propriedades de cada tipo de função. O estudo sugere que, neste sentido, sejam propostas atividades que envolvam representações múltiplas de funções, incentivando a transição e a conexão entre elas. A par destas, considero também como fatores favoráveis no tratamento de algumas dificuldades a natureza das funções estudadas, as suas propriedades, a natureza das tarefas, o papel auxiliar que a calculadora gráfica pode ter e, no fundo, toda a natureza inerente ao processo de ensino aprendizagem, desenvolvido num ambiente de ensino com carácter exploratório.

O desenvolvimento deste trabalho de projeto fez-me recordar, vivendo novamente *in loco* a experiencia tão desafiante que é o de ser investigadora. Incorporei sempre a reflexão sobre a própria prática como algo constante na minha atividade docente. No entanto, considero que acompanhar essa reflexão com um trabalho investigativo como o desenvolvido neste trabalho de projeto acrescenta muito ao meu habitual papel de profissional, preocupada com a minha formação prática e com o sucesso académico dos meus alunos. Acrescenta ao meu habitual papel reflexivo um outro tão importante relacionado com uma visão mais global de escola, onde se procura relacionar a teoria com a prática. A conjugação destes dois papéis contribui, assim, para a minha realização pessoal e profissional e com ele me realizo também ao acreditar na possibilidade de contribuição para a reflexão de outros profissionais docentes.

Referências

Akkoç, H., & Tall, D. (2005). A Mismatch between Curriculum Design and Student Learning: The Case of The function Concept. In D. Hewitt, A. Noyes (Eds.), *Proceedings of The Sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 1-8). University of Warwick, UK.

Akkus, R., Hand, B., & Seymour, J. (2008). Understanding students´ understanding of functions. *Mathematics Teaching*, *207*, 10-13.

Andrade, J., & Saraiva, M. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(2), 137-169.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109-132). Washington, DC: MAA.

Ausubel, D. P. (2002). *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções: uma experiência com alunos do Ensino Secundário*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994*). Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs), *Atas do Encontro de Investigação* *em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Matemática.

Candeias, A. (2010). *Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxílio do software Geogebra*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Carlson, M. P. (1998). A Cross-Sectional Investigation of The Development of The Function Concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education, (7)*, 114-162.

Chorlay, R. (2009). Historical Analysis to Classroom Work: Function Variation and Long-term Development of Functional Thinking. *Proceedings of CERME6,* Lyon, France.

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the Field of Qualitative Research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds), *Handbook of Qualitative Research*. USA: Sage Publications.

DES (1997). *Matemática - Programas 10.º, 11.º e 12.ºanos*. Lisboa: ME

Domingos, A. M. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: form repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2002*).* The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(2)*, 1-16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533–556.

Guerreiro, L. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 271-288). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Reseach in Education, 16,* 1-64.

Maia, D. (2007). *Função quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Acedido em 30 de setembro 2015 em http://livros01.livrosgratis.com.br/cp032202.pdf

Marshall, C., & Rossman, G. B. (2006). *Designing qualitative research.* Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Ministério da Educação (2001a). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Departamento do Ensino Básico.

Ministério da Educação (2001b). *Matemática: Programas – 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: ME-DES.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Neves, M., Guerreiro, L., Leite, A., & Silva, J. (2010). *Matemática A volume II*. Porto: Porto Editora.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' Understandings of Function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making The Connection: Research and Practice in Undergraduate Mathematics* (pp. 27-42). Mathematical Association of America.

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs*. (Doctoral dissertation, University of Georgia). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de matemática. *Revista Educação e Matemática 15*, 3-9.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME – DGIDC.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(3), 303-319. Acedido em setembro de 2015 em http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-015-9631-1.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Saraiva, M., Teixeira, A., & Andrade, J. (2010). *Estudo das funções no programa de matemática A com problemas e tarefas de investigação – Tarefas para o 10.º e o 11.º anos do ensino secundário - Materiais de apoio ao professor*. Obtido em dezembro de 2014 em http://www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf.

Scheuermann, A. M., & van Garderen, D. (2008). Analyzing students' use of graphic representations: Determining misconceptions and error patterns for instruction. *Mathematics Teaching in the Middle School. 13(8)*, 471-477.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22 (1)*, 1-36.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33 (3)*, 259-281.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12 (2)*, 151-169.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da ESE, 5*, 171-202.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. In T. Eisenberg & T. Dreyfus (Eds.), *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (Z)*, 149-156.

Vygostky, Lev S. (1989). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores* (3.ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Wolcott, H.F. (1992). Posturing in qualitative inquiry. In M.D. LeCompte, W.L. Millroy, & J. Preissle (Eds.), *The handbook of qualitative research in education* (pp. 3-52). New York: Academic Press.

Anexos

Anexo 1 – Autorização da direção da escola

Exmo. Sr. Diretor do Agrupamento de Escolas de xxxxxxxxxxxxx

Eu, Ana Isabel Penha Oliveira, professora do grupo 500, na Escola Secundária de xxxxxxxxxxxx, venho, por este meio, solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o Trabalho de Projeto intitulado "Promover as conexões entre diferentes representações: um estudo sobre o conceito de função no 10.ºano". Este Projeto integra-se no âmbito do Mestrado em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, com a orientação da Profª Hélia Oliveira, e tem como objetivo compreender como é que os alunos desenvolvem o conceito de função e qual o contributo que as diferentes representações têm nesse mesmo desenvolvimento.

A concretização do Projeto implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio e/ou vídeo e ocorrerá no 2.º período do presente ano letivo, em momentos em que o tema das funções esteja a ser lecionado. De modo a obter informação mais detalhada está prevista também a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de questionários e entrevistas com alguns alunos.

Mais declaro que será sempre preservado o anonimato dos alunos e da escola. As imagens e o som resultantes do Projeto não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, sendo garantido o cumprimento dos conteúdos programáticos e das indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática A em vigor. Considero que, pelo contrário, a participação dos alunos no estudo, poderá revelar-se uma mais-valia para a sua aprendizagem, pois terão oportunidade para refletir acerca da sua atividade matemática.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Os Encarregados de Educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos neste projeto.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, despeço-me com os melhores cumprimentos, agradecendo, desde já, a sua colaboração.

Carnaxide, 09 de Dezembro de 2014

Pede deferimento

____

(Ana Isabel Penha Oliveira)

Com o conhecimento da Orientadora

____

(Hélia de Oliveira)

Anexo 2 – Autorização dos encarregados de educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Ana Isabel Penha Oliveira, professora de matemática no Agrupamento de Escolas xxxxxxxxxx, na Escola Secundária de xxxxxxxxxxxxx, venho, por este meio, solicitar autorização para a participação do seu educando no Trabalho de Projeto intitulado "Promover as conexões entre diferentes representações: um estudo sobre o conceito de função no 10.ºano". Este trabalho integra-se no âmbito do Mestrado em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, e tem como objetivo desenvolver tarefas e estratégias de ensino que contribuam para uma melhor aprendizagem dos alunos no domínio das funções.

A concretização do Projeto implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio e/ou vídeo e ocorrerá no 2.º período do presente ano letivo, em momentos em que o tema das funções esteja a ser lecionado. De modo a obter informação mais detalhada está prevista também a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de questionários ou entrevistas com alguns dos alunos.

Mais declaro que será preservado o anonimato dos alunos e da escola. As imagens e o som resultantes do Projeto não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, sendo garantido o cumprimento dos conteúdos programáticos e das indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática A em vigor.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, despeço-me com os melhores cumprimentos, agradecendo, desde já, a sua colaboração.

Carnaxide, 09 de Dezembro de 2014

A Professora

____

(Ana Isabel Oliveira)

(Recortar por aqui) ---

Declaro que concordo que o meu educando__________________________________, n.º ____, da turma xxx, do 10.º ano, da Escola Secundária de xxxxxxxxxxx, participe no Trabalho de Projeto intitulado "Promover as conexões entre diferentes representações: um estudo sobre o conceito de função no 10.ºano", desenvolvido pela professora de matemática Ana Isabel Oliveira.

Autorizo/Não autorizo a gravação vídeo do meu educando nas aulas (riscar o que não interessa)

Data:_____________ Assinatura: _____________________________________

Anexo 3 – Planificação da proposta pedagógica

Anexo 3.1. – Generalidades sobre funções

Planificação do 2º Período | **Ano letivo 2014/2015**

Tema II - Funções e gráficos
GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES

Disciplina: MATEMÁTICA - A | **10ºANO**

TEMA	SUB-TEMA	SUB-TEMA/OBJETIVOS	n. blocos	DATA	ACTIVIDADES NA AULA	OBSERVAÇÕES
FUNÇÕES E GRÁFICOS	GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES	➢ Ficha 1 – Diagnóstico (F1) ➢ Generalidades sobre funções (1): -Definir função; - Identificar correspondências que são funções; - Distinguir gráfico de representação gráfica; - Ler e interpretar gráficos.	1	16/01/15	Ficha 1- diagnóstico;	➢ Resolução individual da F1; ➢ Todos os alunos entregam o teste diagnóstico à professora.
		➢ Função, gráfico e representação gráfica. ➢ Generalidades sobre funções (1); - Usar o teste da reta vertical para identificar se uma representação gráfica pode ser ou não uma função; ➢ Formas de representar uma função – Ficha 2 (F2): - Reconhecer funções representadas por esquemas, tabelas, expressões analíticas ou gráficos.	1	19/01/15	Apresentação Escola Virtual – conceito de função; Exploração de algumas questões da F1; Ficha 2: generalidades sobre funções (F2)- realização.	➢ Apresentação da escola virtual "conceito de função"; ➢ Discussão geral das questões 3, 4 e 5 da F1; ➢ Resolução a pares da F2 (os alunos entregam uma folha de resposta por grupo); ➢ TPC – PAG.19
		➢ Estudo intuitivo de propriedades de funções e dos seus gráficos: - Ler no gráfico domínio e contradomínio de uma função; - Identificar/determinar conjunto de partida, conjunto de chegada, domínio e contradomínio de uma função; - Identificar a variável independente e a variável dependente; - Calcular objetos e imagens; - Identificar/determinar os zeros de uma função; - Identificar/determinar os extremos absolutos e extremos relativos de uma função; - Estudar a monotonia e o sinal de uma função; - Construir a tabela de variação de uma função; - Construir o quadro de sinal de uma função; - Estudar a injetividade de uma função; - Estudar a paridade de uma função; - Estudar a continuidade de uma função. ➢ Funções reais de variável real.	3	21/01/15 23/01/15 26/01/15	Ficha 2: generalidades sobre funções Apresentação PowerPoint1 Pág.23 do manual; Pág.28 do manual Escola virtual: Inietividade, Continuidade e paridade de uma função Ficha 3 – Propriedades de funções (F3): realização e discussão geral; Ficha 4 – Propriedades de funções II Correção do TPC.	➢ Discussão geral da F2 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco). ➢ CORREÇAO TPC ➢ Apresentação powerpoint1; ➢ Realização da página 23 – ex.6 ➢ TPC – PÁG. 25; ➢ Realização da página 23 – ex.1,2,3,4); ➢ CORREÇAO TPC ➢ Realização da pág. 28 – ex. 1 e 2 (injetividade) ➢ Continuidade e paridade de uma função. ➢ Resolução a pares da F3 (os alunos entregam uma folha de resposta por grupo); ➢ Discussão geral da F3 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco). ➢ Resolução a pares da F4 (os alunos entregam uma folha de resposta por grupo); ➢ Discussão geral da F4 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco). ➢ Definição de função real de variável real; ➢ TPC – PAG.32 E 33.

Anexo 3.2. – Função afim e função definida por ramos

Planificação do 2º Período — **Ano letivo 2014/2015**

Tema II - Funções e gráficos

FUNÇÃO AFIM e FUNÇÃO DEFINIDA POR RAMOS

Disciplina: MATEMÁTICA - A — **10ºANO**

TEMA	SUB-TEMA	SUB-TEMA/OBJETIVOS	Nº BLOCOS	DATA	ACTIVIDADES NA AULA	OBSERVAÇOES
FUNÇÕES E GRÁFICOS	FUNÇÃO AFIM	➢ Definir função afim; ➢ Representar graficamente uma função afim; ➢ Determinar a intersecção do gráfico de uma função afim com os eixos coordenados; ➢ Conhecer as caraterísticas da função afim (domínio, contradomínio, zeros, monotonia, sinal, injetividade); ➢ Identificar uma função constante e uma função de proporcionalidade direta; ➢ Exprimir processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação simbologia e vocabulário próprios.	1	28/01/15	Ficha5 (45minutos); Pág.40 manual; Pág. 43 do manual(questões 1,2,3,4,5); PowerPoint3 - Caraterísticas da função afim- resumo.	➢ Realização a pares Ficha 5 (os alunos entregam uma ficha por grupo); ➢ Discussão geral da ficha 5 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco); ➢ Resolução em grande grupo da Pág. 40 do manual; ➢ Abordagem das questões da pág.40 através do Geógebra e da calculadora gráfica; ➢ Resolução a pares da página 43 do manual (os alunos entregam uma folha por grupo com a resolução); ➢ Discussão geral das questões da página 43 (os alunos colaboram na correção que é realizada oralmente e no quadro e passam a sua correção para o caderno diário); ➢ Powerpoint3 – Caraterísticas da função afim.
		Na Calculadora Gráfica (CG) ➢ Escrever a expressão analítica de uma função afim; ➢ Definir a "janela de visualização"; ➢ Obter a representação gráfica de uma função; ➢ Usar a função "intersection"; ➢ Determinar os zeros; ➢ Obter imagens e objetos; ➢ Resolver problemas envolvendo a função afim.	1	02/02/15	Conhecendo a calculadora gráfica – powerpoint2 Resolução das questões das páginas 48, 49 e 51 do manual.	➢ Aprender a trabalhar com a calculadora gráfica; ➢ Exploração das potencialidades da calculadora gráfica no estudo das funções: - Powerpoint2; - Pág. 48, 49 e 51 do manual.
		Experimentar e conjeturar: ➢ Estudar a influência do parâmetro m e do parâmetro b na representação gráfica da função afim; ➢ Estudar as caraterísticas da função afim quando m e/ou b é/são zero; ➢ Investigar o número possível de zeros que uma função afim pode ter; ➢ Analisar o sinal de uma função afim, conhecendo os seus zeros; ➢ Investigar a influência dos parâmetros m e b no estudo do sinal de uma função afim. ➢ Exprimir processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação simbologia e vocabulário próprios.	1	04/02/15	Ficha6 – Função Afim (F6)	➢ Resolução a pares da F6 (os alunos entregam uma folha de resposta por grupo); ➢ Discussão geral da F6 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco); ➢ Os alunos desenham os gráficos na folha de respostas e também podem usar a calculadora gráfica.

		➢ Avaliação	1	06/02/15	Realização do teste de avaliação	➢ As questões de desenvolvimento do teste serão sobre funções: generalidades e função afim. As questões de escolha múltipla serão sobre o capítulo da geometria.
FUNÇÕES E GRÁFICOS	FUNÇÃO DEFINIDA POR RAMOS I	➢ Resolver problemas envolvendo a função afim; ➢ Estabelecer conexões entre geometria e funções; ➢ Definir funções definidas por ramos; ➢ Representar funções definidas por ramos de diferentes formas (gráfico, expressão analítica, linguagem corrente, tabela) ➢ Escrever uma expressão analítica de uma função definida por ramos que, graficamente, são partes de retas. ➢ Exprimir processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação simbologia e vocabulário próprios.	1	09/02/15	Ficha 7 – Funções definidas por ramos (F7)	➢ Resolução a pares da F6 (os alunos entregam uma folha de resposta por grupo) – questões 1 e 2;; ➢ Discussão geral das questões 1 e 2 da F7 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco). ➢ Resolução a pares da F7 (os alunos entregam uma folha de resposta por grupo) – questões 3 e 4.
		➢ Resolver problemas envolvendo a função afim e função definida por ramos; ➢ Estabelecer conexões entre geometria e funções; ➢ Representar funções definidas por ramos de diferentes formas (gráfico, expressão analítica, linguagem corrente, tabela) ➢ Exprimir processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação simbologia e vocabulário próprios. ➢ Entrega e correção do teste.	1	13/02/15	Discussão geral das questões 3 e 4 da F7 Pág.52 e 53 do manual Pág.47 do manual	➢ Discussão geral das questões 2 e 3 da F7; ➢ Resolução das questões da pág.47 do manual a pares (os alunos entregam uma folha por grupo); ➢ Discussão das questões em grande grupo; ➢ Realização das páginas 52 e 53 em grupo; ➢ Discussão das questões em grande grupo. ➢ Correção de algumas questões do TPC – pág.47. ➢ Entrega e correção do teste.

Anexo 3.3. – Função quadrática

Planificação do 2º Período — **Ano letivo 2014/2015**

Tema II - Funções e gráficos
FUNÇÃO QUADRÁTICA

Disciplina: MATEMÁTICA - A — **10ºANO**

TEMA	SUB-TEMA	SUB-TEMA/OBJETIVOS	Nº BLOCOS	DATA	ACTIVIDADES NA AULA	OBSERVAÇÕES
FUNÇÕES E GRÁFICOS	FUNÇÃO QUADRÁTICA	➢ Definir e identificar funções quadráticas; ➢ Usar uma função quadrática como modelo matemático de situações da vida real; ➢ Identificar o gráfico de uma função quadrática como sendo uma parábola; ➢ Estudar o sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática; ➢ Determinar as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática; ➢ Determinar o contradomínio de uma função quadrática; ➢ Representar funções quadráticas manualmente e com auxílio da calculadora gráfica;	1	23/02/15	Ficha 8; PowerPoint; Pág.65.	➢ Realização a pares Ficha 8 (os alunos entregam uma ficha por grupo); ➢ Discussão geral da ficha 8 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco); ➢ Apresentação do PowerPoint função quadrática; ➢ Realização a pares da página 65 do manual; TPC: acabar a pág.65
		➢ Determinar os pontos de interseção do gráfico de uma função quadrática com os eixos coordenados; ➢ Determinar os pontos de interseção do gráfico de uma função quadrática com os eixos coordenados; ➢ Zeros de uma função quadrática - Determinar os zeros (fórmula resolvente) - Determinar o número de zeros; ➢ Relacionar o número de zeros com o sinal do binómio descriminante; ➢ Resolver inequações do 2.º grau sem calculadora gráfica; ➢ Resolver inequações de 2.º grau com calculadora gráfica;	2	25/02/15 02/03/15	Pág.65; PowerPoint; Pág.69 e 71	➢ Correção de algumas questões da página 65 do manual; ➢ Continuação da apresentação do PowerPoint-função quadrática; ➢ Realização a pares de algumas questões da pág.69; ➢ Discussão geral; ➢ Realização a pares de algumas questões da página 71; ➢ Discussão geral.
		➢ Resolver inequações de 2.º grau; ➢ Resolver problemas envolvendo a função quadrática; ➢ Usar uma função quadrática como modelo matemático de situações da vida real	1	04/03/15	Ficha 9	➢ Realização a pares Ficha 9 (os alunos entregam uma ficha por grupo); ➢ Discussão geral da ficha 9 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco);

		➢ Resolver inequações de 2.º grau; ➢ Estudar a influência dos valores a, h e k no gráfico da função quadrática; ➢ Resolver problemas envolvendo a função quadrática; ➢ Usar uma função quadrática como modelo matemático de situações da vida real ➢ Estudar a monotonia de uma função quadrática;	4	06/03/15 09/03/15 11/03/15 12/03/15	Ficha 10 Ficha 11 Ficha 12	➢ Realização a pares Ficha 10 (os alunos entregam uma ficha por grupo); ➢ Discussão geral da ficha 10 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco); ➢ Realização a pares Ficha 11 (os alunos entregam uma ficha por grupo); ➢ Discussão geral da ficha 11 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco); ➢ Realização a pares Ficha 12 (os alunos entregam uma ficha por grupo); ➢ Discussão geral da ficha 12 (as correções das fichas de trabalho são feitas em grande grupo com a colaboração dos alunos e estes escrevem as resoluções em fichas de trabalho em branco). ➢ Revisões
		➢ Avaliação	1	13/03/15	Realização do teste de avaliação	➢ As questões de desenvolvimento do teste serão sobre funções: generalidades, função afim, funções definidas por ramos e função quadrática. As questões de escolha múltipla serão sobre o capítulo da geometria.

Anexo 4 – Ficha de Trabalho 1

APRESENTA TODAS AS JUSTIFICAÇÕES QUE CONSIDERES NECESSÁRIAS

1. Observa a figura à direita. O custo de uma reparação (c) é função do tempo de reparação (t).

1.1. O Sr. Feitor pagou 10 € a um técnico da loja de eletrodomésticos que lhe veio reparar o frigorífico a casa. Determina quantos minutos levou o técnico a reparar o frigorífico.

1.2. Completa: $c =$ .... x $t +$ ....

1.3. Representa graficamente a função.

1.4. A função traduz uma situação de proporcionalidade direta? Justifica.

2. A Lei de Boyle-Mariotte foi obtida no séc. XVII pelos cientistas Robert Boyle, inglês e Edmond Mariotte, francês. Pode enunciar-se da seguinte forma:

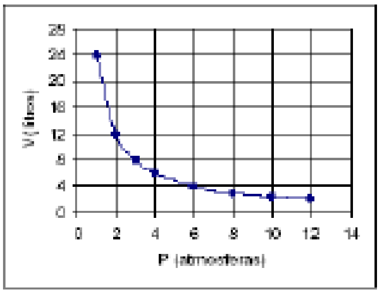
> " *A temperatura constante, para a mesma massa de gás, os volumes ocupados por esta são inversamente proporcionais à pressão que suportam*".

<u>Para uma certa massa de um determinado gás</u>, à temperatura de 20ºC, verifica-se o seguinte:

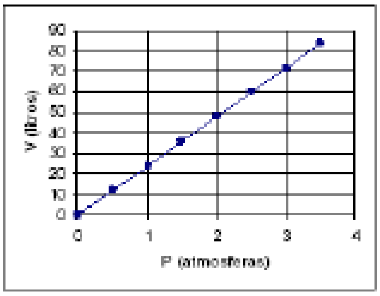
Volume (litros)	Pressão(atmosferas)
1	24
2	12
8	...

2.1. Indica, justificando, qual dos gráficos relaciona o volume ocupado por essa massa de gás em função da pressão que suporta.

I



II



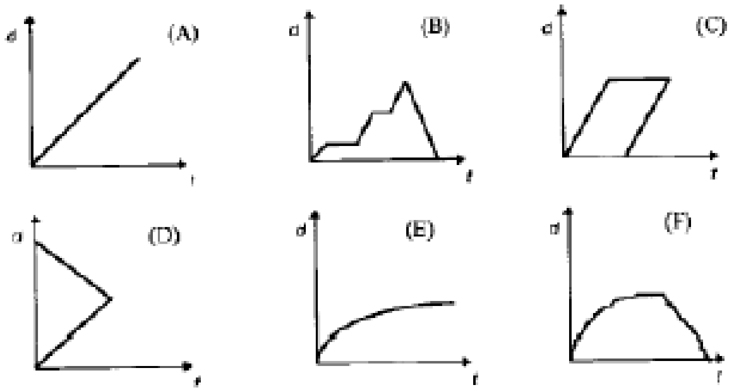
2.2. Determina a pressão exercida sobre essa massa de gás quando ocupa um volume de 8 litros.

2.3. Qual e a expressão analítica que permite escrever o volume (em litros), em função da pressão (em atmosferas), para essa massa de gás?

3. Nos gráficos seguintes, *d* representa a distância relativa a um ponto de partida e *t* o tempo.

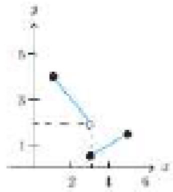
3.1. Quais dos gráficos podem representar viagens? Fundamenta a tua resposta.

3.2. Quais dos gráficos representam funções? Porquê?



4. Observa as seguintes correspondências.

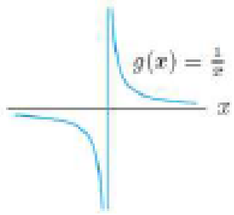
(A)



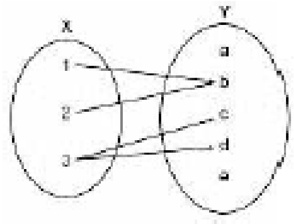
(B)

x	y
-6	-15
-5	-10
-1	0
2	7
-6	15
4	11
-8	45

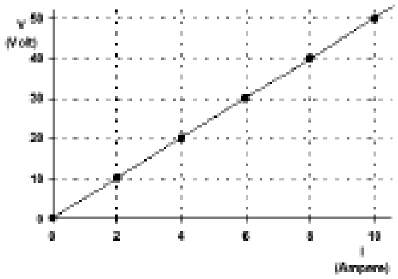
(C)



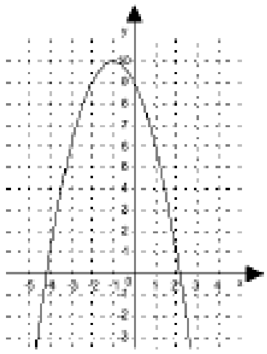
(D)



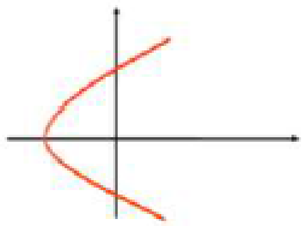
(E)



(F)



(G)



4.1. Identifica quais são as correspondências que representam funções. Justifica.

4.2. Identifica, justificando e caso existam, quais são as correspondências que representam uma:

Função de prop. direta	Função de prop. inversa	Função afim	Função quadrática

5. Sejam A = { -1,1,3,5} e B = {0,1,2,3,4,5,6}. Para a função f: A-> B, definida por f(x) = x+1.

5.1. Determine:

5.1.1. O domínio da função.

5.1.2. O contradomínio da função.

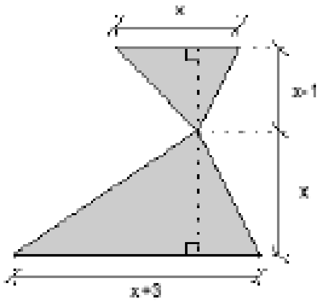
5.1.3. A imagem de 5.

5.1.4. O objeto cuja imagem é 0.

5.2. Representa graficamente a função.

5.3. Qual é o zero da função?

5. A figura seguinte é constituída por dois triângulos com um vértice comum. De acordo com os elementos da figura:
(unidade: cm)



6.1. *Completa a tabela. Apresenta todos os cálculos que efetuares.*
6.2.

x (cm)	Área (cm^2)
1	
	20
5	
	56

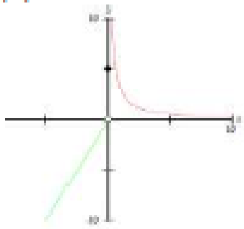
6.3. *Mostra que a sua área é dada pela expressão $A(x) = x(x + 1)$.*

6.4. Representa graficamente a função $A(x)$.

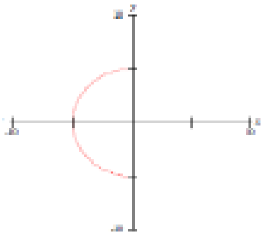
Anexo 5 – Ficha de Trabalho 2

1. Das seguintes alíneas identifica as que não podem representar funções. Justifica.

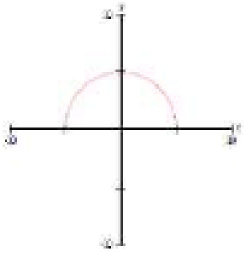
(A)



(B)



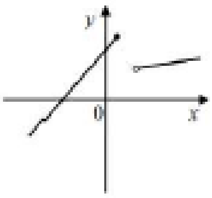
(C)



(D)

x	y
-8	-50
-5	-20
-2	0
0	10
-1	15
-5	20
-8	50

(E)



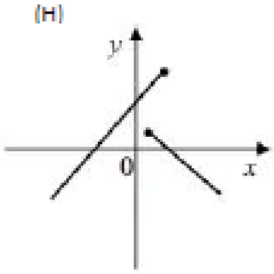
(F)

$3x + y = 5$

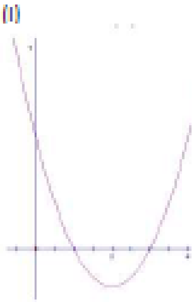
(G)

$x^2 - 2x + y^2 = 8$

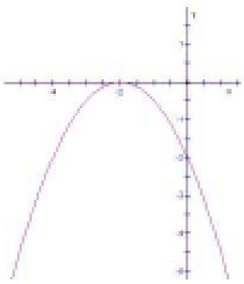
(H)



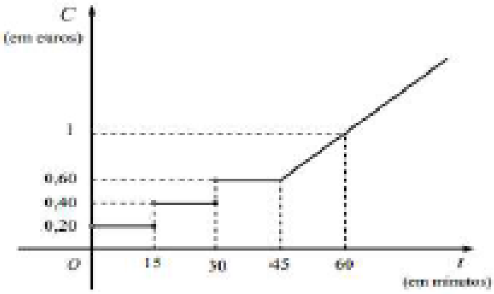
(I)



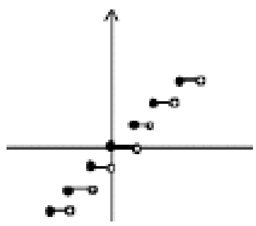
(J)



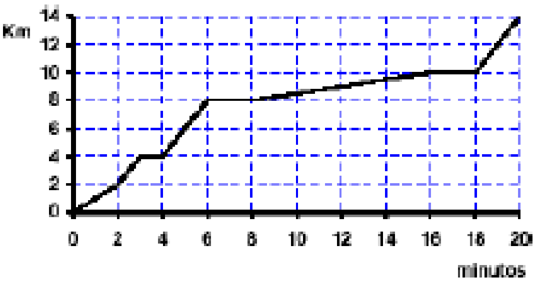
(K)



(L)



2. O gráfico representado ao lado relaciona a distância percorrida (em quilómetros) com o tempo (em minutos) gasto por um comboio que percorre um determinado trajeto.



2.1. Quantos quilómetros percorreu o comboio desde a origem até ao destino?

2.2. Completa a trabela:

Minutos	Quilómetros
	2
8	
	10

2.3. Sabemos que o comboio só parou nas estações. Quantas estações existem nesta linha ferroviária?

2.4. Qual é a distância entre as várias estações consecutivas?

2.5. O comboio demorou o mesmo tempo em todas as paragens?
Tenta encontrar uma justificação para esse facto.

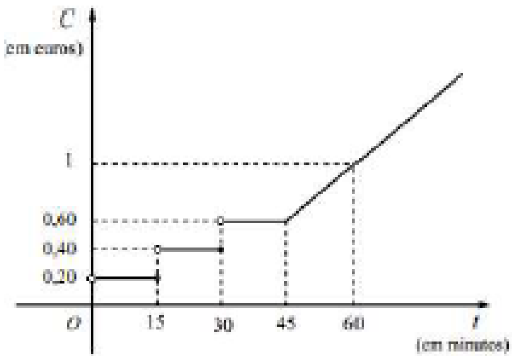
3. No gráfico seguinte é possível perceber quanto é que se paga pelo estacionamento de um automóvel num parque.

3.1. Qual é o preço a pagar por um condutor que estacione a viatura no parque durante:

3.1.1. 10 minutos?___________________________

3.1.2. 25 minutos?___________________________

3.1.3. 30 minutos?___________________________



3.2. Comenta as afirmações seguintes:

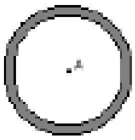
3.2.1. "O custo máximo do estacionamento é de 1€".

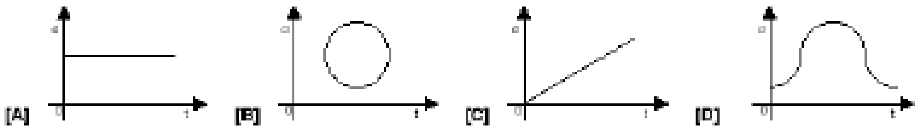
3.2.2. "A cada tempo de estacionamento corresponde um único custo."

3.2.3. "A cada custo corresponde um único tempo de estacionamento."

3.3. Qual deve ser o preço a pagar por um condutor que teve a viatura estacionada no parque durante 2 horas? Explica o teu raciocínio.

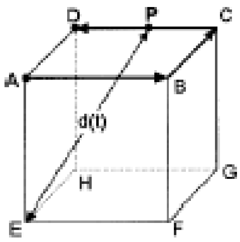
4. Num autódromo existe uma pista circular, conforme se vê na figura. Se estiveres no centro do autódromo (ponto A) e um automóvel der uma volta na pista, qual destes gráficos descreve melhor a distância a que o carro se vai encontrando de ti?

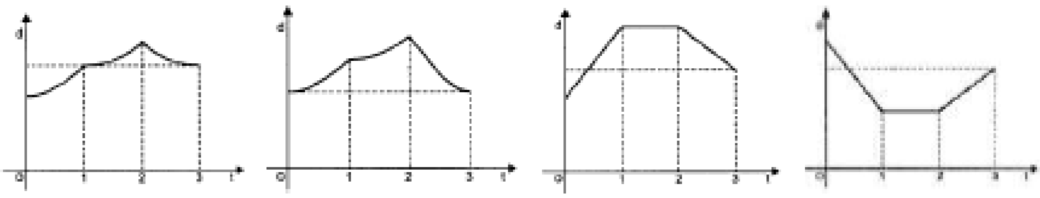




Justifica com um pequeno texto a tua escolha.

5. Na figura, ao lado, está representado um cubo.
Considera que um ponto *P* se desloca ao longo do trajeto que a figura sugere: *P* parte de A e percorre sucessivamente as arestas [AB], [BC] e [CD], terminando o percurso em D. O ponto P demora um segundo a percorrer cada uma das arestas. Seja *d(t)* a distância do ponto *P* ao ponto E, *t* segundos após a partida.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função *d*? Justifica.



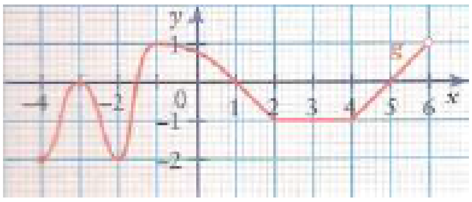


(A) (B) (C) (D)

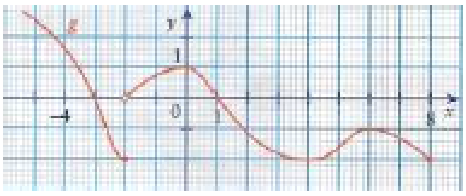
Anexo 6 – Ficha de Trabalho 3

1. Para cada uma das funções representadas, indica os zeros e elabora um quadro de sinal e um quadro de variação.

a)



b)



2. Considera o seguinte quadro de variação:

x	- 3		3		5		6	+ ∞
y	- 3	↗	3	→	3	↘	1	↗

a) Esboça o gráfico de uma função cujo quadro de variação seja o anterior.

b) Indica:

b₁) o domínio, o contradomínio e os zeros.

b₂) o máximo e o mínimo, caso existam.

b₃) o quadro de sinal.

b₄) um intervalo onde a função seja decrescente e positiva.

b₅) o valor de $f(3)$

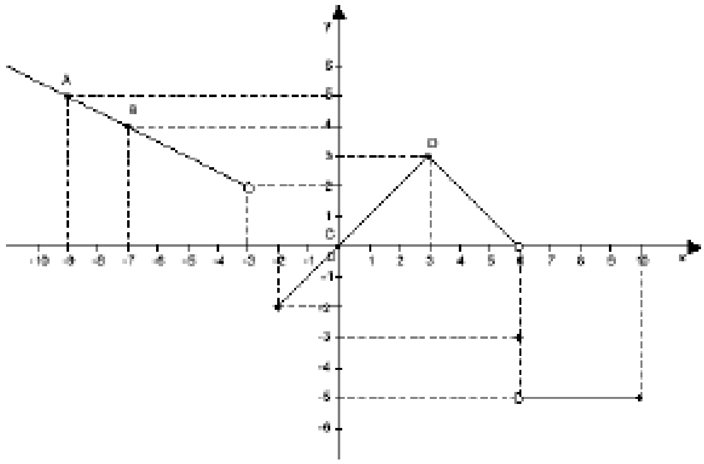
b₆) x, tal que $f(x) = 3$

b₇) x, tal que $f(x) \leq -3$

b₈) x, tal que $f(x) > -3$

Anexo 7 – Ficha de Trabalho 4

1. Na figura está representado o gráfico da função f.



1.1. Qual é o domínio da função?

1.2. Qual é o contradomínio da função?

1.3. Quantos zeros tem a função? Indica-os.

1.4. A função é injetiva? Porquê?

1.5. Indica qual é o máximo relativo e qual é o mínimo absoluto.

1.6. Indica o conjunto de valores para os quais a função:

1.6.1. É positiva e crescente (simultaneamente).

1.2.6. É constante.

1.7. Completa o quadro de sinal da função.

x	$-\infty$	-3		-2		0		6		10
$f(x)$										

1.8. Completa o quadro de variação da função.

x	$-\infty$	-3		-2		3		6		10
$f(x)$										

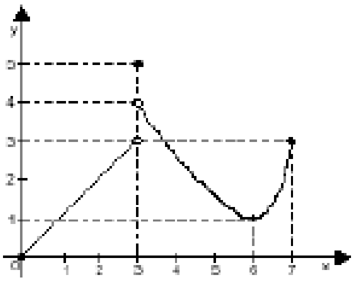
2. Considera a função g definida pelo gráfico.

2.1. Indica o domínio e o contradomínio.

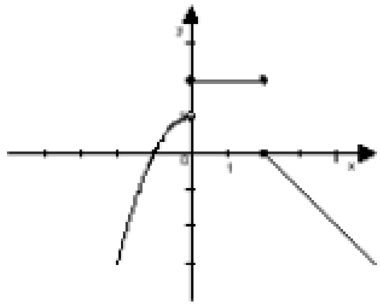
2.2. Indica os intervalos de crescimento de g.

2.3. Qual o máximo no intervalo [1, 3]?

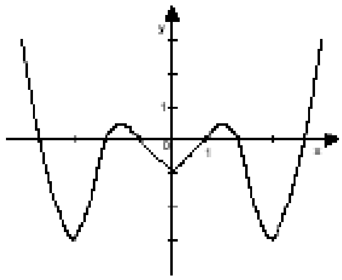
2.4. Indica os mínimos relativos e os mínimos absolutos de g.



3. Observa os gráficos das funções que se seguem e completa a tabela.



f



g

	f	g
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Positiva		
Estritamente crescente		
Estritamente decrescente e negativa		
Injetividade		
Paridade		

4. Faz o esboço gráfico de uma função de modo a obedecer às seguintes condições:

4.1. Domínio IR^+_0 e contradomínio $]5,+\infty[$;

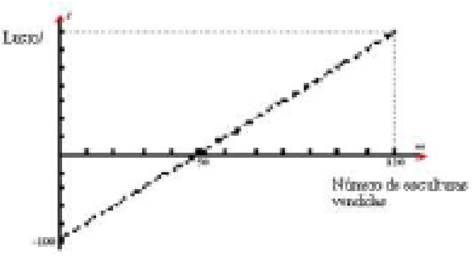
4.2. Par e de contradomínio $[-4,4]$.

Anexo 8 – Ficha de Trabalho 5

COMO COMPRAR UMA PLAYSTATION PORTÁTIL?

A época de saldos começou no fim de Dezembro e o João quer comprar uma PlayStation Portátil (PSP). O custo era de 250 euros, mas encontra-se atualmente em promoção para quem pagar a pronto e em dinheiro. Como não tinha dinheiro nenhum, o João decidiu fazer esculturas com materiais reutilizáveis e vende-las aos parentes e amigos para conseguir comprar a PSP e, até, para ficar com algum dinheiro extra. Assumindo que o João conseguiu comprar a PSP, observa a figura que indica a evolução do dinheiro de reserva (lucro) com que o João fica à medida que aumenta o número de esculturas vendidas. O preço das esculturas é sempre o mesmo.

1. Com o auxílio da representação gráfica, responde às questões que se seguem, justificando.



1.1. Qual o preço da PSP na promoção?

1.2. Qual o preço de cada escultura?

1.3. Determina o lucro máximo obtido com as esculturas vendidas pelo João.

1.4. Escreve um modelo matemático que defina a situação apresentada.

1.5. Se o João tivesse vendido 145 esculturas, com quanto dinheiro ficaria após a compra da PSP?

Adaptado de APM

Anexo 9 – Ficha de Trabalho 6

Considera a <u>FUNÇÃO AFIM</u> f : IR $\longrightarrow$ IR

$$x \mapsto mx + b$$

onde *m* e *b* são números reais.

1. INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO b (ordenada na origem) NA FUNÇÃO AFIM

Fixando os valores de **m** e fazendo variar apenas o valor de **b**, é possível analisar a influência do parâmetro b na função afim.

Tomemos por exemplo **m** = 1. A função reduz-se então a $f(x) = x + b$

Vamos verificar estudando as seguintes funções:

$x \mapsto x - 2$ $\quad$ $x \mapsto x - 1$ $\quad$ $x \mapsto x$ $\quad$ $x \mapsto x + 1$ $\quad$ $x \mapsto x + 3$

⇨ Representa-as graficamente com o auxilio da máquina de calcular.

⇨ Faz um esboço do que observas no visor.

1.1. *Consoante o* **b** *varia, o que observas?*

1.2. *Considera o gráfico da função f(x)=x. Como obténs cada um dos outros gráficos a partir deste?*

1.3. *Completa a frase:*

O gráfico de $x \mapsto x + b$ resulta do de $x \mapsto x$ pela translação associada ao vetor de coordenadas ____________.

2. INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO m (declive) NA FUNÇÃO AFIM

Para estudarmos o efeito da variação de **m** sobre o comportamento da família de funções referida, vamos fixar o valor **b**, variando apenas o valor de **m**.

Tomemos por exemplo **b** = 0. A função reduz-se então a

$$f(x) = m\,x$$

Vamos estudar as seguintes funções:

$x \mapsto -3x$ $\quad$ $x \mapsto -x$ $\quad$ $x \mapsto 0$ $\quad$ $x \mapsto x$ $\quad$ $x \mapsto 3x$

⇨ Representa-as graficamente com o auxilio da máquina de calcular.

⇨ Faz um esboço do que observas no visor.

2.1. *O que têm em comum estes gráficos?*

2.2. *O que observas nas seguintes situações?*

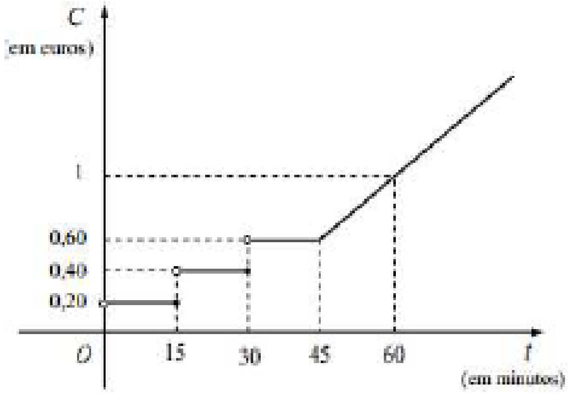
2.2.1. m = 0 $\quad$ 2.2.2. m > 0 $\quad$ 2.2.3. m < 0

2.3. *Completa:*

$x \mapsto mx$	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
Gráfico			
Domínio			
Contradomínio			
Zero			
Sinal			

Anexo 10 – Ficha de Trabalho 7

1. Recorda a situação analisada na ficha 2, referente ao custo (em euros) de estacionamento de um automóvel, em função do tempo (em minutos) de estacionamento.



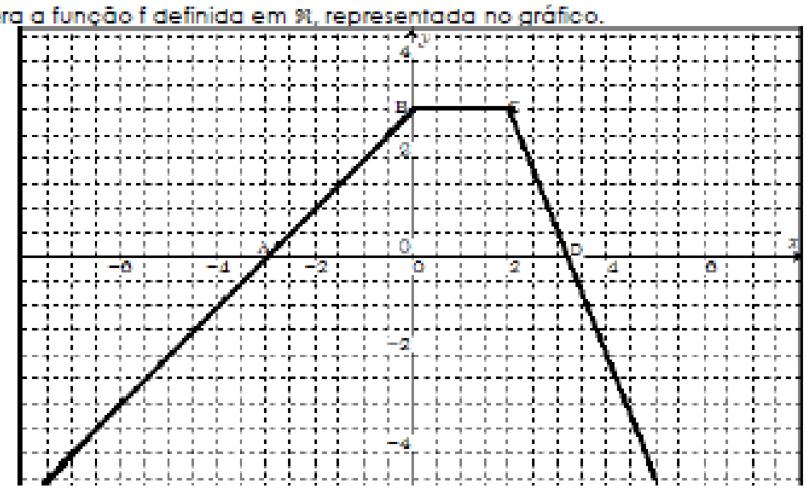
1.1. De acordo com o gráfico, completa a tabela:

Tempo (minutos)	Custo (euros)
10	
25	
30	
	1
	3

1.2. Descreve, num pequeno texto, como se relaciona o tempo (em minutos) com o custo t (em euros).

1.3. Representa analiticamente a função que relaciona o custo C (em euros) com o tempo t (em minutos).

2. Considera a função f definida em $\Re$, representada no gráfico.



2.1. Resolve, por observação do gráfico:
Comenta os resultados obtidos.

f(x)=0	f(x)=3	f(x)=1

2.2. Determina a equação reduzida de cada uma das retas:

AB	BC	CD

2.3. Representa a função f por <u>uma</u> expressão analítica:

$$f(x)=\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

1.4. Elabora um pequeno comentário sobre esta função.

3. Representa graficamente a função y=g(x), definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \leq 2 \\ 1 & , \quad x > 2. \end{cases}$$

4. Numa chamada telefónica internacional são pagos 99 centimos por cada chamada que dure até 20 minutos. Se a chamada durar mais de 20 minutos, por cada minuto seguinte de conversação são cobrados 7 centimos.

4.1. Respresenta, por meio de uma expressão analítica a função C(t), que, para cada chamada telefónica, relaciona o custo C (em centimos) com o tempo t (em minutos).

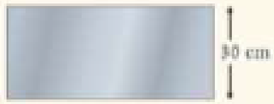
4.2. Indica qual é o domínio da função C(t).

4.3. Representa graficamente a função.

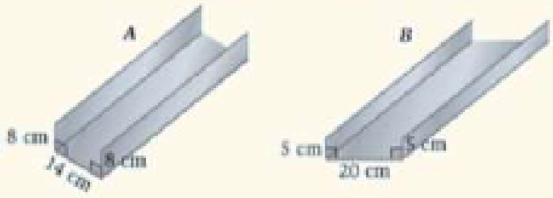
Anexo 11 – Ficha de Trabalho 8

AS CALEIRAS DOS TELHADOS

Uma empresa produz placas metálicas rectangulares com 30 cm de largura.



Unindo estas placas constroem-se caleiras para serem colocadas nos telhados das casas.
As placas são construídas dobrando bandas laterais iguais, que formam ângulos rectos com a base, como se mostra na figura seguinte.



1. Podem ser feitas muitas dobragens diferentes.

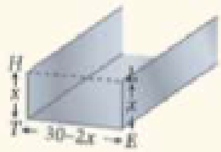
a) As caleiras terão todas a mesma capacidade independentemente da dobragem que é feita?

b) Das duas caleiras A e B , representadas na figura, qual terá maior capacidade?

2. Seja x a altura da banda lateral.

a) Mostre que a área, A , do rectângulo [TELH] é dada, em função de x , por:

$$A(x) = -2x^2 + 30x\,,\quad 0 \leq x \leq 15$$



b) Completa a seguinte tabela e comenta os resultados obtidos.

X (cm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A(x) (cm^2)																

c) Faz um esboço do gráfico de A(x).

d) Comenta a representação gráfica que obtiveste.

e) Indica os zeros, o máximo, o mínimo e o contradomínio da função.

f) Desenha um possível eixo de simetria do gráfico da função.

Anexo 12 – Ficha de Trabalho 9

DE QUEM É A RESPONSABILIDADE?

O ponta de lança da selecção nacional "cortou" uma jogada da defesa, fazendo um "chapéu" ao guarda-redes da equipa adversária e colocando a bola na baliza, mesmo junto à linha. Este golo foi decisivo, já que foi o único do jogo!

Depois dos noventa minutos, houve um debate acalorado nas bancadas da equipa que perdeu, sobre a responsabilidade deste golo: teria o guarda-redes hipótese de saltar e apanhar a bola ou deveriam os defesas ter feito um melhor trabalho?

O Hugo, que tinha assistido ao jogo, fez aos amigos o seguinte esclarecimento da jogada que terminou em golo:

Passados t segundos do pontapé na bola, esta encontrava-se à altura h (em metros) do solo, sendo

$$h(t)=\frac{1}{2}+10t-5t^2.$$

Com base nas palavras do Hugo, responda às questões que se seguem:

1. Quando $t=0$, então $h(t)=\frac{1}{2}$. No contexto deste problema, qual é o significado deste valor?

2. Determine t quando $h(t)>2,3$ e descreva o significado dos valores que encontrou para t.

3. Quanto tempo decorreu, após o pontapé, até que a bola atingiu o solo? (Apresente o **valor exacto ou um valor arredondado às centésimas**).

---

4. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, procure responder à seguinte questão:

   Estando o guarda-redes por baixo da bola no instante em que esta atingiu a altura máxima, conseguiria ele apanhá-la com um salto?

   Apresente, na sua resposta:

   - a representação gráfica da função, ajustada ao contexto, na qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
   - as coordenadas do(s) ponto(s) relevantes;
   - os cálculos necessários que confirmam o valor encontrado graficamente.

Anexo 13 – Ficha de Trabalho 10

1. Considera as seguintes funções:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$; $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$; $h(x) = -2x^2 - 4x$ $i(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

1.1. Completa o seguinte quadro

	f	*g*	*h*	*i*
3.1.1.Zeros				
3.1.2.Esboço do gráfico				
3.1.3.Coordenadas do vértice				
3.1.4.Eixo de simetria				

1.2. Se possível, escreve a expressão analítica das funções na forma **$a(x-x_1)(x-x_2)$** e na forma **$a(x-h)^2+k$**.

	f	*g*	*h*	*i*
$a(x-x_1)(x-x_2)$				
$a(x-h)^2+k$				

Anexo 14 – Ficha de Trabalho 11

1. Uma bola é lançada verticalmente com uma velocidade inicial de 32 m/s. As funções

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 32t + 2{,}1 \quad \text{e} \quad v(t) = -9{,}8t + 32$$

podem ser utilizadas para prever, respetivamente, a altura (em metros) e a velocidade (em metros por segundo) da bola em cada instante.

Resolve as seguintes questões com o auxílio da calculadora gráfica:

1.1. Faz um esboço do gráfico das duas funções.

Nota: a representação terá de ser ajustada ao contexto, na qual devem de estar devidamente assinalados as coordenadas dos pontos relevantes (aproximadas às centésimas).

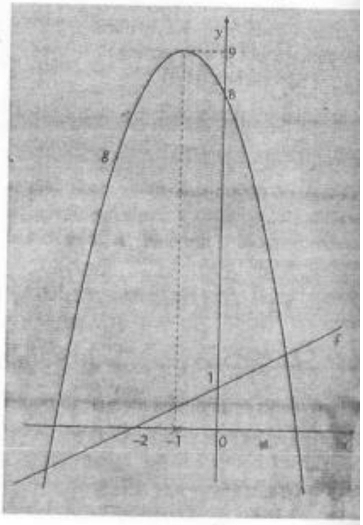
1.2. Qual é a altura máxima que a bola atinge? Em que momento? Qual é a velocidade, nesse momento?

1.3. Qual é o domínio de cada uma das funções? E o contradomínio?

1.4. Qual é a velocidade da bola, no momento em que chega ao solo?

2. No referencial da figura estão representadas duas funções f e g, respectivamente, função afim e função quadrática.

2.1. Determina a expressão analítica de cada uma das funções.



2.2. Por processos exclusivamente analíticos, indica:

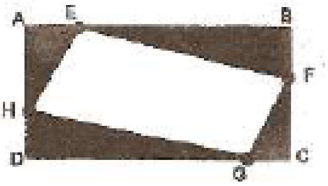
2.2.1. Para que valores de x se tem g (x) > f(x).

2.2.2. Para que valores de x se tem g (x) ≤ f(x).

3. Resolve analiticamente a inequação $x^2 + 3x \leq 2x^2 - 1$ e verifica a solução encontrada com a ajuda da calculadora gráfica.

Anexo 15 – Ficha de Trabalho 12

1. O retângulo $[ABCD]$ da figura tem por dimensões 6 e 4. Sobre os lados marcam-se os pontos E, F, G e H tais que $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$.
   Seja **A** a função que a cada x faz corresponder a área do quadrilátero $[EFGH]$.



1.1. Verifica que:

1.1.1. $A(x) = 2x^2 - 10x + 24$ e que $0 \leq x \leq 4$.
1.1.2. Para todos os valores de x , $A(x) \geq 11{,}5$.

1.2. Representa graficamente a função **A** e verifique que:

- É crescente em $[2{,}5; 4]$ e decrescente em $[0; 2{,}5]$.
- 11,5 é o mínimo da função.
- Existem dois valores de x , correspondentes a dois quadriláteros diferentes, para os quais a área é 16.
- Para se obterem quadriláteros de área superior a 19,5 o x tem que pertencer ao intervalo $[0; 0{,}5]$.

1.3. Determina o perímetro do quadrilátero que tem área mínima.

Adaptado de Funções 10, DES, 1997

2. Para fazer uma filmagem, um carro iria cair no mar depois de subir uma rampa que terminava num precipício. A função seguinte traduz a altitude h , em metros, a que o carro se encontrava em função do tempo t em segundos

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t + 3 & se \quad 0 \leq t \leq 60 \\ -t^2 + 120t - 3577 & se \quad t \geq 60 \end{cases}$$

2.1. Quando o carro iniciou o movimento a que altitude estava?

2.2. Quando o carro caiu no precipício a que altitude se encontrava?

2.3. Em que momento o carro caiu no mar?

2.4. Faz um esboço do gráfico da função.

Anexo 16 – Teste de avaliação n.º1 (2.ª parte)

2ª PARTE

Nos itens da 2ª parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
Atenção: quando, para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o valor exacto.

1. De uma função h(x) de domínio IR, sabe-se que:
   - h(0)=0;
   - h é estritamente crescente em $[0,+\infty[$;
   - h é par.

Indique, justificando, qual das afirmações é verdadeira.

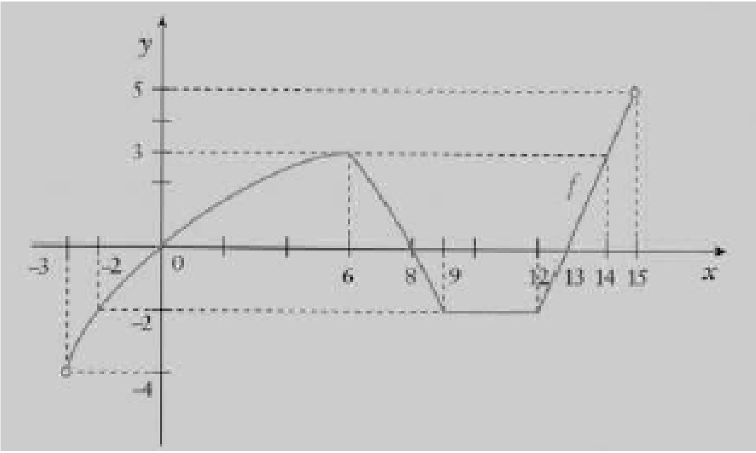
(A) h é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

(B) O contradomínio de h é $[0,+\infty[$.

(C) h não tem zeros.

(D) O contradomínio de h é $]2,+\infty[$.

2. Observe o gráfico da função f.



2.1. Indique o domínio e o contradomínio da função f.

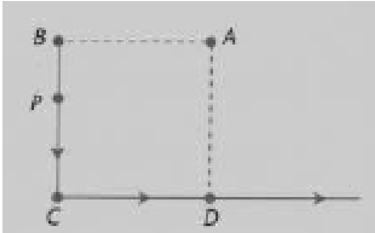
2.2. Determine $f\left(\frac{19}{2}\right)$.

2.3. Indique, se existirem, os extremos absolutos e relativos de f.

2.4. Determine o conjunto de valores $x \in D_f : f(x) > -2$.

2.5. Elabore o quadro de variação da função f.

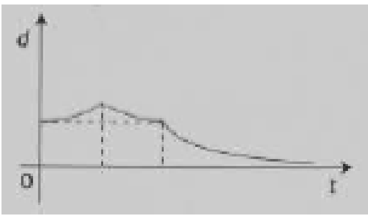
3. Na figura estão representados:



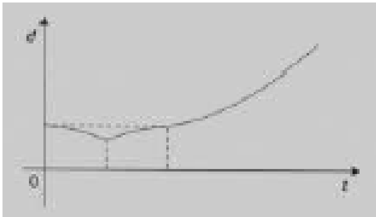
- um quadrado $[ABCD]$.
- uma semi-recta $\dot{C}D$.

Admita que um ponto P, partindo de B, se desloca a velocidade constante ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento $[BC]$ e seguidamente a semi-recta $\dot{C}D$).
Qual dos gráficos seguintes representa a distância d, do ponto P ao ponto A, em função do tempo t, contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento? Justifique.

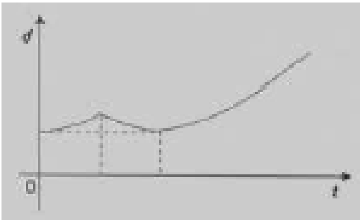
(A)



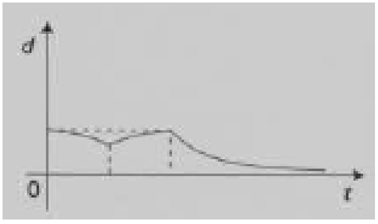
(B)



(C)



(D)



4. O sinal de uma função t, de domínio $\mathbb{R}$, é dado pelo seguinte quadro de sinais:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$t(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

4.1. Faça um possível esboço do gráfico da função.

4.2. Quantos zeros tem a função? Indique-os.

4.3. A função é injetiva? Justifique.

4.4. A função é par? Justifique.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida graficamente na figura.

Indique para a função f:

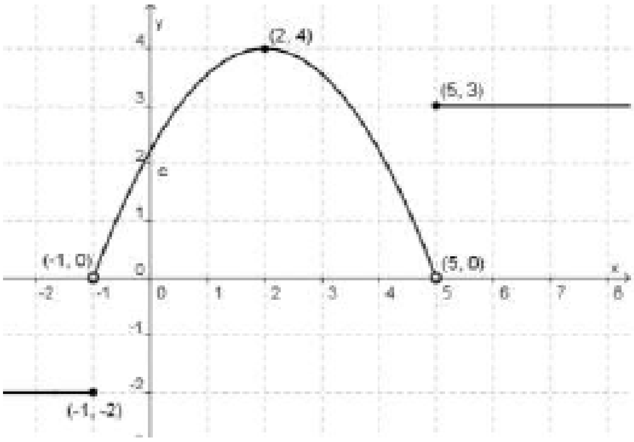
5.1. O contradomínio.

5.2. Os zeros.

5.3. $f(5)$.

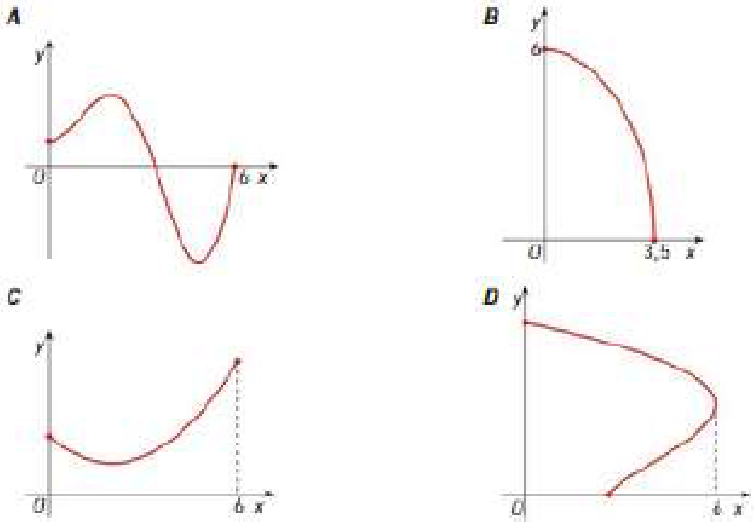
5.4. Um intervalo em que seja decrescente.

5.5. O número de soluções da equação f(x) = 4.

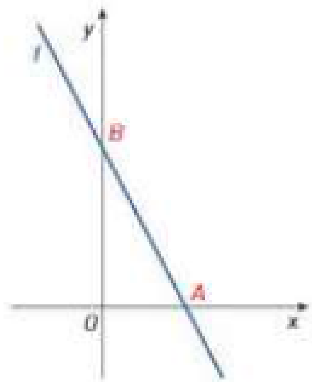


6. Depois de observadas as representações gráficas seguintes, indique qual delas corresponde a uma função que satisfaça simultaneamente as seguintes condições:
   - Domínio: [0, 6];
   - Possui máximo absoluto e mínimo absoluto;
   - Não muda de sinal.
   -

Indique uma razão que justifique a rejeição de cada uma das três opções não seleccionadas.



7. Na figura seguinte está representada uma função afim f. Sabe-se que:
   - A imagem de -1 é 5;
   - O zero da função é 1,5.



7.1. Determine a expressão algébrica que define a função f.

7.2. Calcule as coordenadas do ponto do gráfico de f que tem:

7.2.1. Abcissa 12.

7.2.2. Ordenada -4.

7.3. Indique as coordenadas dos pontos A e B, pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

Anexo 17 – Teste de avaliação n.º2 (2.ª parte)

2ª PARTE

Nos itens da 2ª parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
Atenção: quando, para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função afim *f* que, para cada valor real de *k*, é definida em IR por:

$$f(x)=(k^2-1)x+6$$

Determine os valores de *k* para os quais:

1.1. *f* é decrescente;

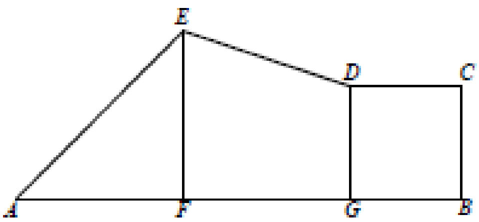
1.2. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

1.3. o gráfico de *f* é uma reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

2. Considere o polígono [*ABCDE*] representado na figura.

Sabe-se que:

- *F* e *G* são pontos de [*AB*];
- [*BCDG*] é um quadrado;
- [*DEFG*] é um trapézio retângulo;
- [*AFE*] é um triângulo retângulo em *F*;
- $\overline{AF}=\overline{FE}=\overline{FG}$
- $\overline{AB}=8\text{ cm}$
- $\overline{AG}=x\text{ cm}$, $(x\in]0,8[)$



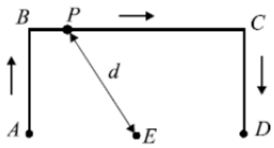
2.1. Mostre que a área, em cm², do polígono [*ABCDE*] é dada por $A(x)=x^2-14x+64$.

2.2. Determine os valores de *x* para os quais a área do polígono [*ABCDE*] é inferior a 24 cm².
Apresente a resposta na forma de um intervalo de números reais.

2.3. Exprima *A* na forma $A(x)=a(x-h)^2+k$, onde *a*, *h* e *k* são números reais.

2.4. Indique o valor mínimo que a área do polígono [*ABCDE*] pode atingir.

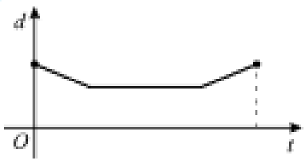
3. Na figura está representado o trajeto de um ponto P.



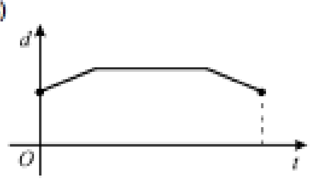
O ponto P iniciou o seu percurso em A e só parou em D, tendo passado por B e por C. Para cada posição do ponto P, seja *t* o tempo decorrido desde o início do percurso e seja *d* a distância do ponto P ao ponto E. Qual dos seguintes gráficos pode relacionar correctamente as variáveis *t* e *d*?

Escolha a opção correta, indicando uma razão para cada opção eliminada.

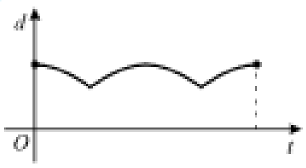
(A)



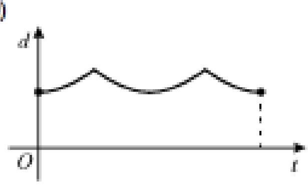
(B)



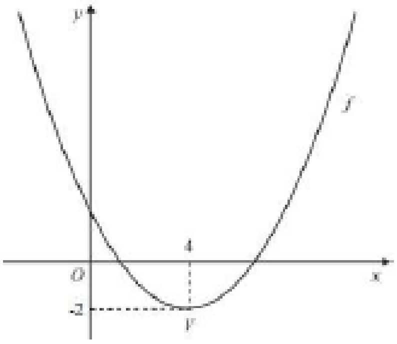
(C)



(D)



4. Na figura está representada, num referencial o.n. *x0y*, parte da parábola que é o gráfico de uma função *f*.



Sabe-se que:

- A parábola intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas (0,2);
- O ponto V, vértice da parábola, tem coordenadas (4, -2).

4.1. Sejam *h* e *j* as funções de domínio IR, definidas por: *g(x)=f(x)+3* e *h(x)=f(x-1)*.

4.1.1. Indique qual é a transformação que permite obter o gráfico da função *g* a partir do gráfico da função f.

4.1.2. Indique os contradomínios das funções *f, g* e *h*.

4.2. Sendo *h* e *k* números reais, a função *f* pode ser definida por uma expressão do tipo:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

Indique os valores de *h* e *k*, e determine o valor de *a*.

Bom Trabalho!

Anexo 18 – Questionário aplicado no início do ano letivo

Nome:____

N.º: _____ 10º Ano Turma: _____ Data ___/___/___

Morada: ____Telefone: __________________

1. Data de nascimento: ___/___/___
2. Habilitações escolares do Pai: ____
3. Profissão do Pai: ____
4. Habilitações escolares da Mãe: ____
5. Profissão da Mãe: ____
6. És repetente? Não ☐

   Sim ☐ A que disciplinas reprovaste?______________________________
7. Quais as duas disciplinas que gostas mais? _______________________________

   7.1. Porquê? ____
8. Quais as duas disciplinas que gostas menos? _____________________________

   8.1. Porquê? ____
9. Qual o agrupamento que escolheste?______________________________________

   9.1. Porquê?____
10. Que profissão gostarias de ter no futuro? _________________________________

    10.1. Porquê?____
11. O que gostas de fazer nos tempos livres? _________________________________

    11.1. Porquê? ____
12. Gostas de matemática? Sim ☐ Não ☐

    12.1. Porquê? ____
13. A Matemática achas que és um aluno:

    Muito Bom ☐ Bom ☐ Médio ☐ Fraco ☐ Muito Fraco ☐

    13.1. Porquê?____